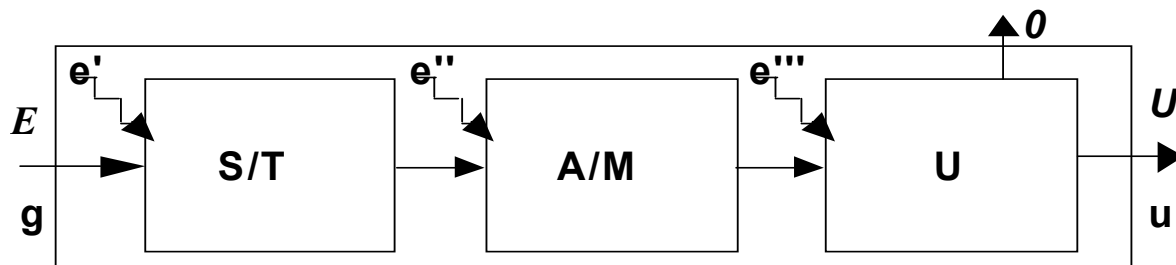
STRUMENTI DI MISURA

INTRODUZIONE

La misura di una grandezza fisica richiede il confronto con il campione primario dell'unità di misura ad essa omogenea. Questo tipo di misura, detta fondamentale, è limitato al caso particolarissimo della riproduzione del campione di unità di misura. Molto più spesso è sufficiente confrontare la grandezza fisica con un campione secondario o utilizzare uno strumento che, grazie alla taratura[1] effettuata dal suo costruttore, conserva memoria del campione di unità di misura.
Il compito di uno strumento di misura è la percezione del valore del misurando o di un segnale di misura che ne rappresenta il valore; la trasmissione e conversione del segnale; la visualizzazione del risultato.
Il principio fisico sfruttato in uno strumento per eseguire la misurazione può essere il più vario: deformazioni elastiche, dilatazione termica, effetti magnetici e termici delle correnti elettriche, variazioni dei parametri di componenti elettrici (resistenza, capacità, induttanza), interferenza luminosa, ritardo temporale tra trasmissione e ricezione di un segnale.

Il più generale apparecchio di misura si può rappresentare con uno schema a blocchi dove *E* rappresenta l'entrata dello strumento, *U* l'uscita e *0* è l'indicatore di zero.

e', **e''**, **e'''** = disturbi che sono cause di errore (variazioni di grandezze influenti)
u = f(**g**) funzione di trasferimento/caratteristica/curva di risposta o di graduazione dello strumento

In questa schematizzazione, quando si effettua una misurazione, l'oggetto definito come misurando va posto in contatto attraverso la porta d'entrata *E* con l'apparecchio; cioè bisogna inserire lo strumento. A questo punto lo strumento produce all'uscita *U* un effetto che è in relazione con la grandezza **g** in misura. Il momento adatto per leggere la risposta **u** dello strumento è segnalato dall'indicatore di zero.

Il primo elemento di uno strumento (sensore e/o trasduttore: S/T) preleva ("sente") il valore del misurando e produce un corrispondente segnale di misura; spesso opera anche una

[1] Più correttamente l'operazione di memorizzazione dell'unità di misura viene detta graduazione (il costruttore incide le tacche sullo strumento capostipite di serie in base alla sua risposta a sollecitazioni note)

"trasduzione" del tipo di grandezza (ad esempio trasforma uno spostamento in una variazione di resistenza o una variazione di temperatura in una variazione di volume, ecc.)

Segue uno stadio (di amplificazione o manipolazione: A/M) che amplifica elettronicamente o manipola meccanicamente il segnale di misura prodotto dallo stadio precedente. In generale la trasmissione fra il primo e l'ultimo elemento di uno strumento avviene mediante amplificatori, attenuatori, filtri, trasduttori, convertitori e trasmettitori.

L'elemento finale è il dispositivo di lettura. A seconda della risposta fornita dal dispositivo di uscita lo strumento può essere analogico o digitale: analogico se l'uscita è rappresentata da una grandezza che segue con continuità le variazioni dell'ingresso (ad esempio un indice su una scala); digitale se l'uscita rappresenta il numero delle volte che un digit della grandezza da misurare entra nella grandezza stessa (ad esempio il numero visualizzato su un *display*)[2]. Lo strumento di uscita può essere anche uno schermo, un contatore elettromeccanico, una stampante, un dispositivo acustico, la memoria di un elaboratore, una memoria di massa (disco flessibile, disco rigido, etc.).

La serie di elementi di un apparecchio di misura che costituisce il percorso del segnale di misura dall'ingresso all'uscita viene detta catena di misura. I suoi elementi possono non essere nello stesso luogo (dati prodotti dal sensore e trasmessi a distanza al dispositivo di uscita: telemetria) o nello stesso tempo (i dati prodotti dai primi elementi della catena di misura vengono memorizzati e successivamente sono elaborati e visualizzati: oscilloscopi digitali)
Alcuni strumenti sono in grado di misurare più grandezze fisiche fra loro non omogenee (p.es. un tester misura tensioni, correnti, resistenze, capacità, frequenze, etc.). Altri possono fornire il valore di più misurandi contemporaneamente (p.es. oscilloscopio a doppia traccia).

Può sembrare a prima vista che molti strumenti di misura non siano riconducibili allo schema indicato in figura: dove si trovano l'entrata, l'uscita e l'indicatore di zero quando si misura la lunghezza di un'asta con un regolo graduato? Anche in questo semplicissimo caso, tuttavia, con un leggero artificio, si può riconoscere nell'apparecchio di misura un'entrata (l'inizio dell'asta è allineato con l'inizio del regolo), una uscita (la fine dell'asta indica l'uscita sul regolo) e un indicatore di zero (la lettura va effettuata sulla scala del regolo solo quando è in corrispondenza della fine dell'asta).

---

[2] vedremo che la differenza fra una scala digitale e una analogica perde di significato quando l'incremento digitale è più piccolo dell'incertezza dell'indicazione (precisione).

CARATTERISTICHE GENERALI DEGLI STRUMENTI

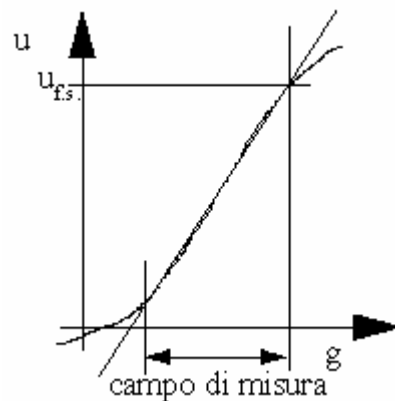
GRADUAZIONE E TARATURA

Per comprendere il significato dell'indicazione fornita da uno strumento è bene considerare la sequenza delle principali operazioni che, almeno in linea di principio, devono essere effettuate durante la realizzazione di uno strumento di misura.

Supponiamo di aver già costruito un dispositivo che sollecitato da una grandezza fisica **g** [3] fornisce una risposta **u** che può essere l'angolo che un indice ruotante forma rispetto ad una direzione di riferimento, la distanza di un punto luminoso da un punto di riferimento arbitrario, un numero visualizzato su un contatore.

Fino a momento ancora non è stata stabilita quantitativamente la relazione numerica fra l'entità della grandezza in misura e l'indicazione dello strumento di uscita.

Sollecitiamo ora il dispositivo con grandezze fisiche di entità nota (perché derivate direttamente dalla definizione del campione di unità di misura o, più frequentemente, perché misurate con strumenti di qualità superiore a quella dello strumento che si sta per realizzare).

Realizziamo quindi per punti un grafico (di taratura) del tipo:

In questo esempio la dipendenza di **u** da **g** (curva di risposta dello strumento) è sostanzialmente lineare per un intervallo di valori di **g** che verrà assunto come campo di misura dello strumento[4] (il costruttore garantirà che all'interno di quell'intervallo lo strumento funziona correttamente). Il valore massimo misurabile $\mathbf{u}_{\mathbf{f.s.}}$, detto fondo scala dello strumento, coincide con l'estremo superiore del campo di misura; se l'estremo inferiore è nullo il campo di misura viene detto portata.

A partire dalla curva di risposta dello strumento è possibile assegnare ad ogni posizione dell'indice dello strumento o ad ogni indicazione numerica del contatore un valore che rappresenta la misura della grandezza fisica che sollecita lo strumento. Poiché come risultato dell'operazione la scala dello strumento viene suddivisa in parti, l'operazione viene detta graduazione dello strumento e la curva di risposta viene anche detta curva di graduazione.

---

[3] qualora il costruttore stesse organizzando la produzione di una serie di strumenti questo strumento sarebbe detto il capostipite della serie: la produzione verrebbe eseguita a partire dalle sue caratteristiche

[4] la maggior parte degli strumenti di misura mostra un andamento lineare della risposta; negli strumenti con risposta non lineare il campo di misura è definito come l'intervallo nel quale la risposta dello strumento segue l'andamento teorico prevedibile in base al principio di funzionamento dello strumento

È evidente come a questo punto sia stato memorizzato nello strumento il valore del campione di unità di misura.

L'operazione di graduazione dovrebbe essere ripetuta ogni volta che si sospetti che la funzione di risposta dello strumento sia variata (strumento starato). In questo caso l'operazione, detta taratura, consiste nel confrontare il valore della grandezza fisica che sollecita lo strumento con l'indicazione fornita dallo stesso (dopo la graduazione dello strumento non si devono più misurare angoli o lunghezze perché il dispositivo di uscita fornisce direttamente la misura).
Il risultato della taratura può essere trasformato in una tabella o un grafico correttivi mediante i quali ad ogni valore letto dello strumento viene associata la misura corretta.

SCALA DEGLI STRUMENTI ANALOGICI

Gli strumenti di misura analogici possono avere anche più di una scala.
- indice: parte fissa o mobile di un dispositivo indicatore la cui posizione, rispetto a tacche di riferimento, permette di determinare il valore indicato (p.es.: ago, punto luminoso, superficie di un liquido).
- scala: insieme ordinato di tacche (con una numerazione associata) che forma parte del dispositivo indicatore di uno strumento di misura.
- tacca: incisione sulla scala
- divisione: parte della scala compresa fra due tacche consecutive.
- valore di una divisione: distanza fra due tacche misurata nelle unità riportate sulla scala.
- scala lineare/non lineare: scala in cui il rapporto fra la lunghezza (p.es. in cm) e il valore di ciascuna divisione è/non è costante per tutta la scala. Una scala non lineare può essere ad esempio: logaritmica, quadratica, parabolica, iperbolica (ohmetro).
- scala a zero soppresso: scala in cui l'intervallo ricoperto dalla scala non include lo zero (p.es.: il termometro clinico).
- scala a zero centrale: scala in grado di presentare valori sia positivi che negativi

USCITA DI UNO STRUMENTO DIGITALE

Gli strumenti di misura digitali, specialmente quelli con visualizzatore (*display*) di tipo elettronico, possono avere anche più di una scala.
Rispetto alla scala di uno strumento analogico:
- invece di un indice si ha una rappresentazione numerica; spesso la posizione della virgola può variare al variare del fondo scala dello strumento
- la lettura è multipla di una quantità detta *digit* (minima variazione apprezzabile dallo strumento)
- la cifra meno significativa può essere più piccola del *digit*: (esempio bilancia con digit 0,5 g e indicazione al decimo di grammo)
- nel caso di strumenti elettronici è raro trovare scale non lineari essendo semplice modificare la funzione di risposta per renderla lineare anche se alcuni elementi della catena di misura non lo sono

Inoltre:
- quando la sollecitazione supera la portata viene spessa indicata la condizione di *overflow*.
- se lo strumento può misurare più grandezze fisiche, per ogni scala viene visualizzata la corrispondente unità di misura
- quando è significativo la risposta può presentare valori sia positivi che negativi (contro esempi: cronometro, bilancia)

SENSIBILITÀ, PRECISIONE, ACCURATEZZA

••• SENSIBILITÀ

Una delle principali caratteristiche distintive di uno strumento di misura è la sua **sensibilità**:

rapporto fra la variazione della risposta (uscita) e la variazione della sollecitazione (ingresso)

Negli strumenti analogici la definizione coincide con la derivata della curva di risposta: $s = \frac{\partial u}{\partial g}$.

Negli strumenti digitali la definizione corrisponde a $s = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta g}$ dove il valore minimo che può assumere Δg è pari al *digit*.

Al variare della sollecitazione la sensibilità può essere costante, se la funzione di trasferimento è lineare (p.es. voltmetro, oscilloscopio), o variare in funzione della sollecitazione (p.es.: ohmmetro).

Dopo la graduazione dello strumento è possibile definire la sensibilità della scala dello strumento che fornisce direttamente l'indicazione del valore di una divisione:

$$1/s = \frac{\Delta g}{\text{div}} \quad \text{(p.es. 10 mA/div, 5 kg/div, etc.).}$$

La sensibilità della scala è quindi pari all'inverso della sensibilità dello strumento (da qui il simbolo 1/s per la sensibilità della scala).

Più lo strumento è sensibile e più piccola è la variazione della grandezza di ingresso che produce una variazione dell'uscita pari a una divisione della scala.

••• PRECISIONE

La capacità di uno strumento di fornire indicazioni similari sotto condizioni di ripetibilità della misurazione della stessa grandezza è detta precisione.
Tornando allo schema a blocchi di uno strumento tarato si può notare come, in generale, la risposta **u** dello strumento sia funzione non solo della grandezza **g** (cioè **u = u(g)**) ma anche di altre quantità **e'**, **e''**, **e'''**, etc. che influenzano il risultato variando in modo impredicibile e quindi costituendo errori di tipo casuale **u = u(g; e', e'', e'''...) ≈ u(g)**.
Tanto più lo strumento è esente da questi effetti e tanto più è preciso.

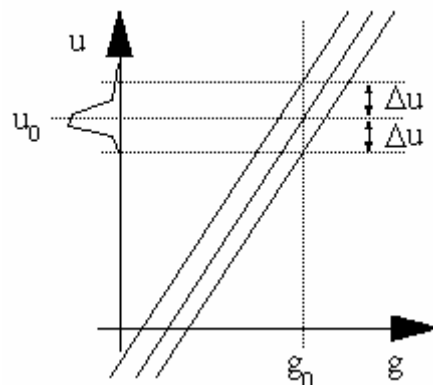
La precisione e la sensibilità **s** dello strumento sono due caratteristiche antitetiche: uno strumento molto sensibile riesce a percepire piccole variazioni della grandezza di ingresso ed è quindi sensibile anche alle cause di errore; uno strumento molto preciso non sarà sensibile a questi fattori casuali e quindi sarà tipicamente poco sensibile anche alle variazioni dell'ingresso.

La bontà di uno strumento è determinata essenzialmente dalla sua precisione in quanto aumentarla implica la completa riprogettazione dello strumento basandosi, talora, su principi diversi. Al contrario esistono molti metodi per aumentare la sensibilità: indici più lunghi, leve ottiche, nonio, lenti di ingrandimento, microscopi, metodi interferenziali, ecc.

Durante la fase di graduazione dello strumento si può osservare come a parità di sollecitazione $\mathbf{g_0}$ lo strumento non fornisca il solo valore $\mathbf{u_0} = \mathbf{u}(\mathbf{g_0})$ ma tutta una serie di valori prossimi ad esso con una distribuzione approssimativamente a campana[5].

---

5 essendo improbabile che tutti gli errori e', e'', e''', etc. contribuiscano all'errore complessivo sommandosi, si verifica una parziale compensazione degli errori per cui è più verosimile trovare un andamento del tipo di quello graficato

Il costruttore può ripetere la procedura variando la sollecitazione ma troverà sempre nella risposta dello strumento la manifestazione degli effetti casuali cioè dell'imprecisione dello strumento.
Si può definire intorno ad ogni valore $\mathbf{u_0}$ un intervallo contenente almeno il 90% dei risultati e quindi tracciare, parallelamente alla retta **u**(**g**), una banda di larghezza 2 Δ**u** [6].

Negli strumenti in cui il valore minimo misurabile è nullo la precisione viene sinteticamente indicata con la classe di precisione, valore pari al rapporto (espresso in percentuale) fra la semilarghezza della banda di imprecisione e il valore del fondo scala dello strumento:

$$C.P. = 100\ \frac{\Delta u}{u_{f.s.}}.$$

Uno strumento inizia ad essere di buona qualità se C.P. è minore di 1.

RELAZIONE FRA SENSIBILITÀ E PRECISIONE

Avevamo notato in precedenza come sensibilità e precisione siano due caratteristiche antitetiche; vediamo ora come con la graduazione dello strumento si realizzi un compromesso fra esse.
Realizzato uno strumento (può essere un prototipo o il capostipite di una serie) lo si può sollecitare con grandezze note per realizzare un grafico di taratura.
A questo punto, a causa della limitata precisione, sollecitando lo strumento sempre con la grandezza $\mathbf{g_0}$, la risposta varierà casualmente intorno al valore $\mathbf{u(g_0)}$; assai frequentemente il valore della risposta sarà contenuto nell'intervallo [$\mathbf{u(g_0)}$ - Δ**u**; $\mathbf{u(g_0)}$ + Δ**u**].

Se sulla scala dello strumento venissero indicate delle divisioni di larghezza molto inferiore a 2 Δ**u**, a parità di sollecitazione si otterrebbero valori apprezzabilmente diversi fra loro e l'utilizzatore dello strumento dovrebbe ricorrere a metodi statistici per elaborare la misura, ottenendo, spiacevolmente, la sensazione di aver utilizzato uno strumento assai impreciso.
Al contrario, se le divisioni sulla scala fossero molto maggiori di 2 Δ**u**, la sensibilità della scala sarebbe assai scarsa e quindi verrebbe realizzato uno strumento poco sensibile.

Il giusto compromesso è quindi di avere divisioni sulla scala pari a circa 2 Δ**u** in modo tale da avere elevata sensibilità e contemporaneamente la garanzia che nella quasi totalità[7] dei casi è sufficiente una sola misurazione.
Come risultato dell'operazione di graduazione, quindi, la sensibilità della scala di uno strumento (**la divisione**) **è indice della** sua **precisione** (larghezza della distribuzione dei risultati di misure ripetute).

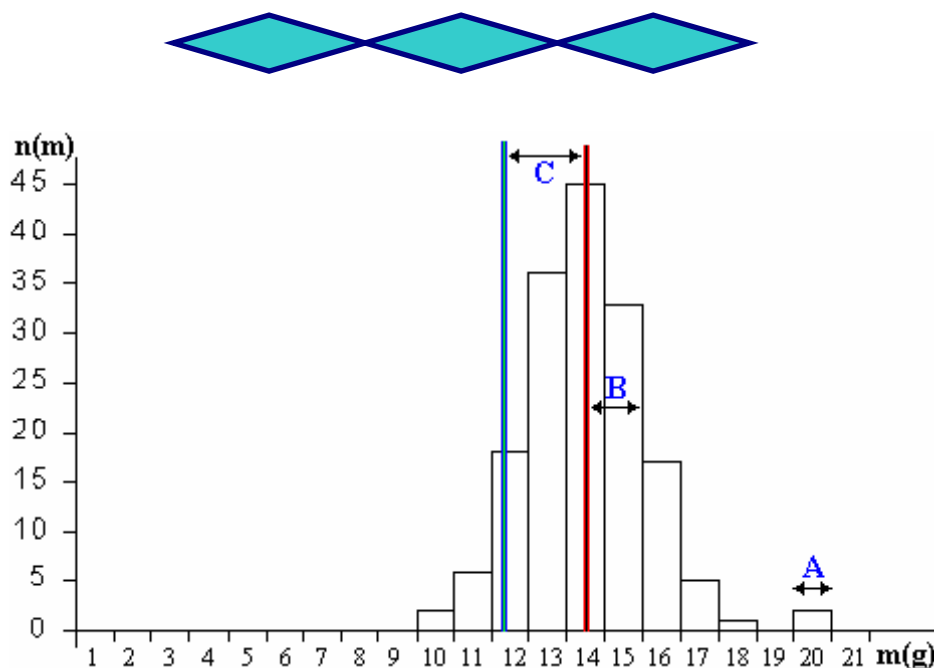
---

6 si tratta di un grafico di taratura che definisce la banda all'interno della quale si trovano con elevata probabilità tutti i possibili risultati. Si parla, ovviamente, di rette di taratura solo nel caso in cui la funzione di risposta sia lineare
7 tipicamente almeno il 90% dei casi

Negli <u>strumenti analogici</u> di buona qualità è quindi necessario, per sfruttare a pieno la loro precisione, introdurre degli accorgimenti per ottenere divisioni sulla scala molto piccole ma leggibili. Poiché la lettura va effettuata apprezzando almeno il decimo di divisione, questa non può essere troppo piccola. La normativa DIN 1319 indica come valore minimo della distanza fra due tacche consecutive 0,7 mm.

A prima vista potrebbe sembrare che il fatto che uno <u>strumento digitale</u> non possa fornire indicazioni all'interno dell'intervallo dato dal suo *digit* costituisca uno svantaggio rispetto agli strumenti analogici. In realtà in questo paragone è la precisione degli strumenti che va confrontata con il *digit*: se la variazione della risposta (a parità di sollecitazione) è superiore al *digit* il vantaggio dello strumento analogico è solo apparente.

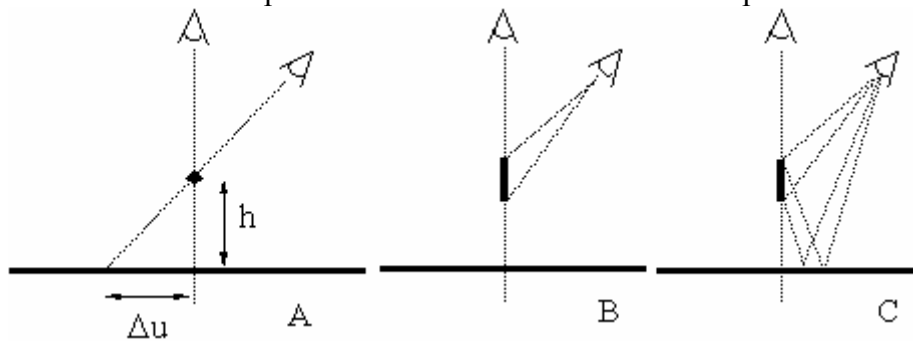
••• ACCURATEZZA

Si definisce <u>accuratezza</u> di uno strumento la sua capacità di fornire una risposta media prossima al valore vero del misurando. Il reciproco di questo concetto è l'inaccuratezza che cerca di quantificare la presenza di errori sistematici evidenziabile, sotto condizioni di ripetitività, dalle differenze delle medie aritmetiche di campioni di misure ottenuti mediante metodi e/o strumenti diversi.
Una volta evidenziata l'inaccuratezza di uno strumento se ne deve ridurre l'entità o tramite l'<u>aggiustamento</u>, operazione che altera uno strumento di misura al fine di riportarne le caratteristiche entro i valori limite previsti; p.es. l'azzeramento di un ohmmetro o di un Palmer o mediante una <u>calibrazione</u>, operazione che non altera uno strumento di misura e porta alla conoscenza della differenza fra i valori indicati dallo strumento e i corrispondenti valori veri (concetto qualitativo).

Da questo istogramma di misure di massa effettuate con un ipotetico strumento si evidenzia che:
- la **sensibilità** è legata alla più piccola quantità apprezzabile (la larghezza A è pari a un decimo della divisione di uno strumento analogico o al *digit* di uno digitale)
- la **precisione** è legata alla larghezza B che rappresenta la deviazione standard della distribuzione determinata dagli errori casuali
- l'**accuratezza** è determinata dalla distanza C fra il valore vero e la media aritmetica di un grande numero di misure

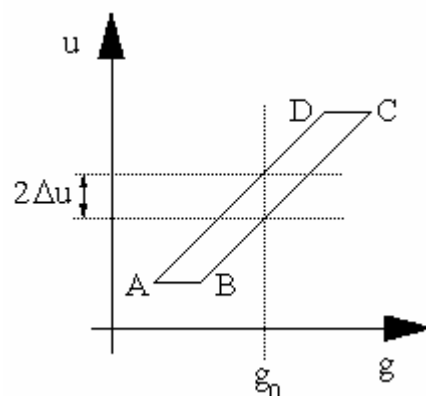
ERRORI DI MISURA

Passiamo ora a considerare **alcune possibili cause di errore introdotte dagli strumenti di misura considerando che esse possono essere presenti in generale in ogni misurazione**.

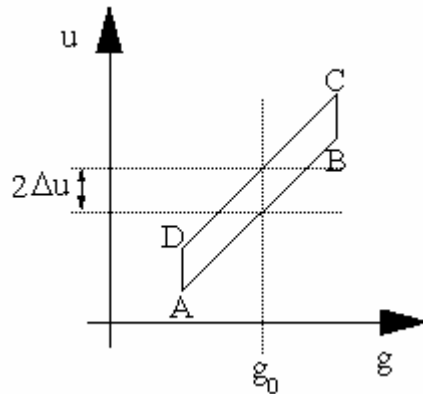
ERRORE DI PARALLASSE

Consideriamo la distanza (indicata con **h** in figura A) che deve essere lasciata dal costruttore fra l'indice e la scala dello strumento per evitare che durante l'uso l'indice possa urtare su di essa.

A causa di questa distanza un osservatore posto in posizione non perpendicolare alla scala leggerebbe un valore errato di entità variabile al variare della posizione di lettura (errore casuale).
Per ovviare all'inconveniente l'indice dello strumento è sagomato in modo da consentire la percezione dell'errata posizione di lettura: in B l'osservatore in posizione scorretta vede lo spessore dell'indice. In molti strumenti viene posto uno specchio dietro l'indice in modo tale che l'osservatore in posizione non perpendicolare osservi sia l'indice che la sua immagine riflessa (C).

ERRORE DI MOBILITÀ

In un sistema meccanico, quando si passa da una situazione di riposo ad una di movimento, l'attrito da statico diventa dinamico riducendosi. Questo significa che al disotto di un valore critico, detto soglia di mobilità, una variazione dell'ingresso non produce una variazione dell'uscita.
In figura è mostrato questo caso: se lo strumento è inizialmente in A, prima che l'indicazione vari occorre che la sollecitazione arrivi in B. Superata la fase di stacco la risposta segue fedelmente la sollecitazione fino a C.
Se arrivati in C si inverte l'andamento dell'ingresso, si manifesta nuovamente un problema di mobilità quando l'indice si arresta:

Come risultato complessivo l'effetto degli attriti è che a parità di sollecitazione g_0 la risposta dello strumento non è univoca.

ERRORE DI ISTERESI

Molti sistemi mostrano il comportamento descritto in figura: mentre la sollecitazione cresce da A a B la risposta la segue linearmente. Quando però in B la sollecitazione smette di crescere il sistema continua ad evolvere portandosi in C. Analogamente, tornando da C verso D, la risposta decresce ma in D, a parità di sollecitazione, il sistema evolve da D ad A.
Come risultato l'effetto dell'isteresi è che a parità di sollecitazione g_0 la risposta dello strumento non è univoca.

Il fenomeno dell'isteresi è tipico dei fenomeni elastici in cui la plasticità dei materiali introduce deviazione dalla legge di Hooke[8].

ERRORI DI TARATURA E DI ZERO.

Durante la vita di uno strumento esso è sottoposto sia ad una serie di stimoli derivanti dalla misurazione delle grandezze fisiche per le quali lo strumento è stato progettato, sia ad una serie di sollecitazioni indesiderate che possono alterarne le caratteristiche o addirittura danneggiarlo. Escludendo quest'ultima eventualità[9] la degradazione di uno strumento è prevedibile. Inoltre, anche durante la produzione di una serie di strumenti saranno inevitabili piccole differenze di risposta fra uno strumento e l'altro.
Come risultato di queste cause, nel momento in cui si effettua una misura non si è a conoscenza dell'esatto ammontare di questi piccoli effetti che possono con una certa frequenza alterare la risposta dello strumento in assenza di sollecitazione (zero) e, più raramente, addirittura porzioni o la totalità della scala (taratura).
Il costruttore può prevedere l'entità di questi effetti da un'analisi a campione e tenerne conto insieme alle altre cause di imprecisione[10].

Quelle che abbiamo appena esaminato sono alcune delle più frequenti cause di imprecisione. Altre sorgenti di errore possono essere vibrazioni meccaniche, dilatazioni termiche, disturbi elettromagnetici e più in generale variazioni delle condizioni dell'ambiente in cui opera lo strumento (il costruttore può prevedere – o limitare – il tipo di ambiente in cui opererà uno strumento e quindi valutare quantitativamente l'intervallo 2 Δ**u** relativo a queste cause).

8 anche il magnetismo nella materia presenta isteresi a causa dell'irreversibilità nel meccanismo di allineamento dei domini magnetici nei materiali ferromagnetici.
9 questa esclusione non riguarda, ahimé, il nostro corso di Laboratorio ...
10 l'errore di zero ha anche una componente sistematica che può essere ridotta in vari modi (si pensi alla misura dello zero nel Palmer e all'azzeramento dell'ohmmetro)

ERRORI DA INTERAZIONE STRUMENTO-MISURANDO

Abbiamo visto alcune cause di errore intrinseche dello strumento o dovute all'ambiente in cui esso opera. Oltre a queste ne esistono altre che sono funzione anche delle caratteristiche delle grandezze in misura e dei sistemi che le generano.
In questo caso gli effetti prodotti sono di tipo sistematico perché, riportato il sistema nelle condizioni iniziali, l'interazione strumento-misurando agisce nello modo alterando la misura della stessa entità.

ERRORE DI INSERZIONE

Quando si esegue una misurazione occorre presentare la grandezza in misura all'ingresso dello strumento (inserzione dello strumento). Durante questa operazione viene perturbato il sistema sul quale si effettua l'osservazione alterando il misurando e quindi falsando il risultato della misura.
L'effetto, anche se può essere quantitativamente trascurabile[11], non è in linea di principio eliminabile perché l'attivazione dello strumento richiede dell'energia che deve essere fornita dal sistema in misura; è questa cessione di energia ad alterare il misurando.
Trattandosi di un effetto sistematico deve essere ridotto agendo sui parametri fondamentali che lo regolano e/o apportando correzioni al risultato.

Vedremo nel seguito come l'errore di inserzione dipenda, nelle misurazioni di temperatura, dal rapporto fra le capacità termiche del termometro e del corpo in misura e dalla differenza delle loro temperature iniziali; nelle misurazioni di tensioni e correnti dalla resistenza interna dello strumento e da quella del circuito equivalente di Thevenin del circuito sul quale si opera. In generale è necessario conoscere il principio di funzionamento dello strumento e le sue caratteristiche principali prima di poter ottenere da esso misure accurate.

ERRORE DI RAPIDITÀ

In uno strumento analogico l'indice si muove solidalmente con parti mobili dello strumento che ne costituiscono l'**equipaggio mobile.** A causa della sua inerzia il dispositivo di uscita non può fornire istantaneamente il valore della grandezza in misura.

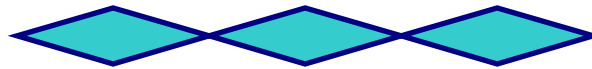
Si definisce tempo di risposta l'intervallo di tempo tra l'istante in cui varia bruscamente l'ingresso e quello in cui l'uscita assume stabilmente, entro i limiti specificati, il valore finale.

Effettuare la lettura dello strumento prima del tempo di risposta, cioè prima che sia stato attivato l'indicatore di zero, introduce degli errori (detti di rapidità) non sempre trascurabili. Il problema è poi tanto più grave quanto più rapidamente varia la grandezza in misura.
Per ridurre gli effetti dovuti a questo tipo di errore è quindi necessario studiare il principio di funzionamento di ciascun strumento per poter valutare caso per caso il suo tempo di risposta.

In alcuni strumenti (ad esempio termometro) la risposta temporale u(t) è descritta da un'equazione differenziale del primo ordine. In questo caso l'evoluzione temporale dell'indicazione dello strumento è di tipo esponenziale ed è caratterizzata da una costante di tempo che dipende esclusivamente dalle caratteristiche dello strumento. Dopo un tempo pari a tre volte la costante di

[11] cioè di entità inferiore alla sensibilità dello strumento e quindi ininfluente ai fini numerici.

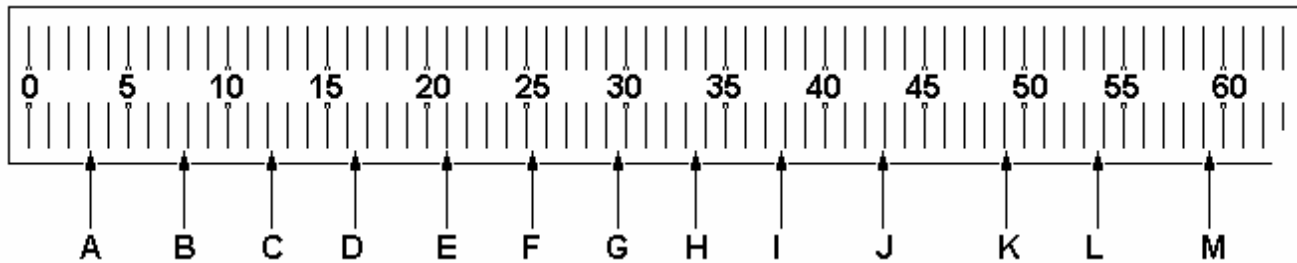
tempo, la risposta fornita dallo strumento differisce da quella ideale del 5% circa della differenza fra l'indicazione iniziale e quella finale raggiungibile asintoticamente.

In altri strumenti (ad esempio dinamometro, amperometro) la risposta temporale è descritta da un'equazione differenziale del secondo ordine. In questo caso il moto dell'indice è determinato dalla frequenza di risonanza naturale del sistema e dal coefficiente di attrito viscoso. A seconda del coefficiente di smorzamento l'indicazione raggiunge più o meno rapidamente il valore asintotico o lo attraversa compiendo intorno ad esso oscillazioni di ampiezza decrescente. In ogni caso solo grandezze che variano con frequenza inferiore a quella di risonanza naturale possono essere misurate con errori di rapidità trascurabili.

CARATTERISTICHE GENERALI DI UNO STRUMENTO TARATO RILEVABILI DALL'OSSERVAZIONE DELLA SCALA

Esaminando le indicazioni riportate sulla scala di uno strumento si possono dedurre molte informazioni sulle sue caratteristiche e quindi sul miglior modo di utilizzarlo.
Innanzi tutto dalle unità di misura è possibile ricavare il tipo di grandezze che è possibile misurare mentre i valori minimo e massimo misurabili determinano il campo di misura.
Se le divisioni sulla scala sono uguali in tutti i punti della scala se ne può dedurre che la curva di risposta dello strumento è lineare; in questo caso, se è possibile variare la portata dello strumento, le misure con la minore incertezza saranno quelle ricavate da letture effettuate in prossimità del fondo scala.
Il valore della divisione (anche qualora non fosse costante in tutti i punti della scala) fornisce il valore della sensibilità della scala e quindi, invertendo tale valore, quello della sensibilità dello strumento: se in un punto della scala di un ohmmetro la divisione corrisponde a 50 Ω, allora la sensibilità della scala in quel punto è **1/s** = 50 Ω /div e la sensibilità dello strumento (sempre in quel punto) è **s** = 1 div/50 Ω.
Sapendo che nel graduare uno strumento si raggiunge un compromesso fra la sensibilità della scala dello strumento e della sua precisione, il valore della divisione (pari all'intervallo 2 Δ**u**) rappresenta l'intervallo di confidenza entro cui con un livello di confidenza di almeno il 90 % cade il valore vero del misurando. In altre parole nota la sensibilità dello strumento se ne conosce anche la precisione.
Infine, almeno per le cause di inaccuratezza ragionevolmente prevedibili, il valore della divisione fornisce anche la stima approssimativa della massima entità degli errori sistematici che non dipendono dalla grandezza in misura (errori di inserzione e rapidità esclusi), cioè dell'accuratezza dello strumento.
Una grossolana indicazione della rapidità dello strumento è poi data dal tempo necessario per ottenere una risposta costante nel tempo quando venga misurata una grandezza non variabile.

Quanto detto finora sia applica sostanzialmente anche al caso di strumenti digitali pur di sostituire alla sensibilità il valore del digit. L'unica accortezza da tenere è quella di considerare che in questi strumenti l'imprecisione è a volte maggiore (anche se poco) del *digit* e quindi per una valutazione più corretta è indispensabile ricorrere al manuale di istruzioni dello strumento (in ogni caso difficilmente quello che abbiamo chiamato intervallo 2 Δ**u** supera i 3 *digit*).

STRUMENTI DI MISURA ANALOGICI

LETTURA AL DECIMO DI DIVISIONE

Per eseguire correttamente la lettura su una scala analogica occorre apprezzare il decimo di divisione. Dopo un poco di allenamento si riuscirà [12] ad ottenere valori discordanti al più di uno o due decimi di divisione dalla lettura corretta; non è un problema perché l'incertezza da associare alla misura è tipicamente di circa tre decimi di divisione.
Il risultato della lettura effettuata su uno strumento analogico va quindi riportato fino al decimo di divisione (anche se tale valore fosse uno o più zeri in posizioni decimali).

METRO

In generale è un regolo rigido (di plastica o metallo) o un nastro (di stoffa o metallo) sufficientemente inestensibile che può essere srotolato. Il valore di fondo scala, sostanzialmente pari alla lunghezza dello strumento, varia dalla decina di centimetri alle decine di metri con sensibilità della scala variabili dal mezzo millimetro al mezzo centimetro per divisione.
Effettuando la lettura si cercherà, come in ogni strumento analogico, di apprezzare il decimo di divisione.

L'uso del metro richiede che l'oggetto della misura venga posto in contatto (inserito) con l'inizio della scala graduata e che la lettura venga effettuata in corrispondenza della fine del misurando.
Per evitare problemi dovuti all'usura che tende ad accorciare le estremità del regolo, qualora ci sia il sospetto di questo effetto, la prima estremità del misurando andrà posta in corrispondenza di una tacca del regolo diversa dalla prima e se ne terrà conto in fase di elaborazione del dato letto (p.es. se l'oggetto inizia in corrispondenza con la tacca con la scritta 1 cm e termina a 6,37 cm allora il risultato di una singola misura sarà[13] 5,370 ± 0,029 cm).

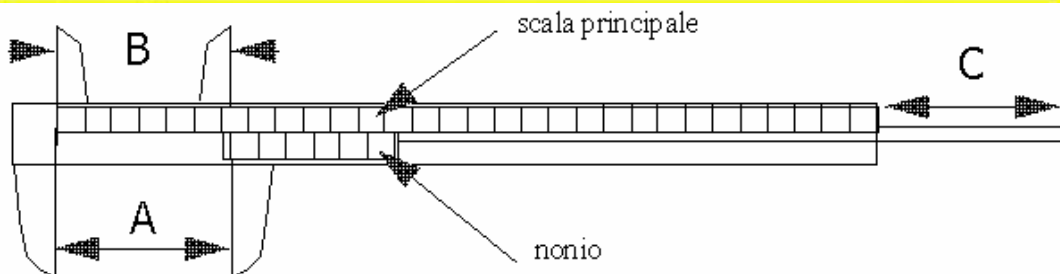
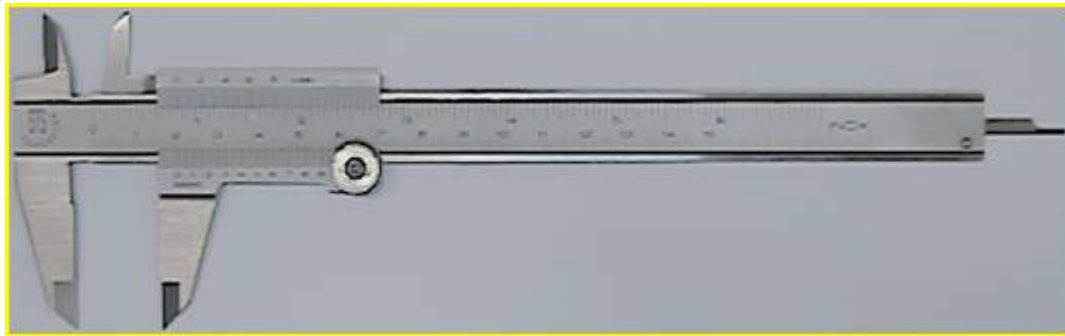
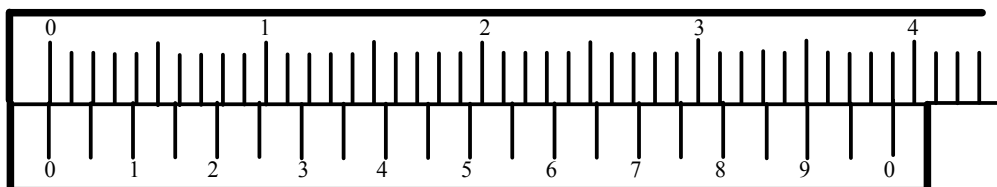
Per effettuare misure accurate occorrerà tener conto delle eventuali variazioni di lunghezza dovute alla dilatazione termica (specialmente se gli strumenti vengono utilizzati a temperature molto diverse da quella alla quale sono stati tarati, 20 °C secondo la normativa DIN 102).
L'ordine di grandezza di questa inaccuratezza è quantificabile con la larghezza della divisione ma si riferisce al valore di fondo scala dello strumento; per misure non a fondo scala e per differenze di misure effettuate con lo stesso strumento tale incertezza deve essere proporzionalmente ridotta .

---

[12] confrontate le vostre letture con A:3,1 B:7,8 C:12,2 D:16,4 E:21,0 F:25,3 G:29,6 H:33,5 I:37,8 J:42,9 K:49,1 L:53,7 M:59,3

[13] notare il numero di cifre: la lettura al decimo di divisione è 5,37 ma poiché l'incertezza (che va sempre riportata con due cifre significative) arriva ai millesimi di centimetro, anche il valore va riportato fino ai millesimi di centimetro: 5,37 → 5,370

CALIBRO A CURSORE CON NONIO

Lo strumento ha una parte fissa ed una scorrevole e, mediante due sistemi di ganasce e un codolo, permette di eseguire misure esterne (A), interne (B) e di profondità (C). Sulla parte fissa è riportata una scala (principale) con tacche ogni millimetro; la parte mobile è solidale con un nonio solitamente ventesimale (decimale nei modelli più economici, cinquantesimale in quelli più precisi).

Consideriamo il nonio ventesimale dei calibri in dotazione al Laboratorio. In essi a 39 divisioni della scala principale D (da 1 mm) corrispondono 20 di quelle della scala secondaria: 39 D = 20 d .

Per costruzione, se il nonio, che è solidale con la parte scorrevole del calibro, viene spostato verso destra di una quantità δ si osserverà la coincidenza della prima tacca del nonio con una (la seconda) della scala principale. Se invece il nonio si sposta di 2 δ allora sarà la seconda tacca del nonio a coincidere con una della scala principale e così via: se a coincidere con una delle divisione della scala fissa è l' n-sima divisione del nonio, ciò significa che esso (e quindi le ganasce e il codolo) sono stati spostati della quantità n δ.

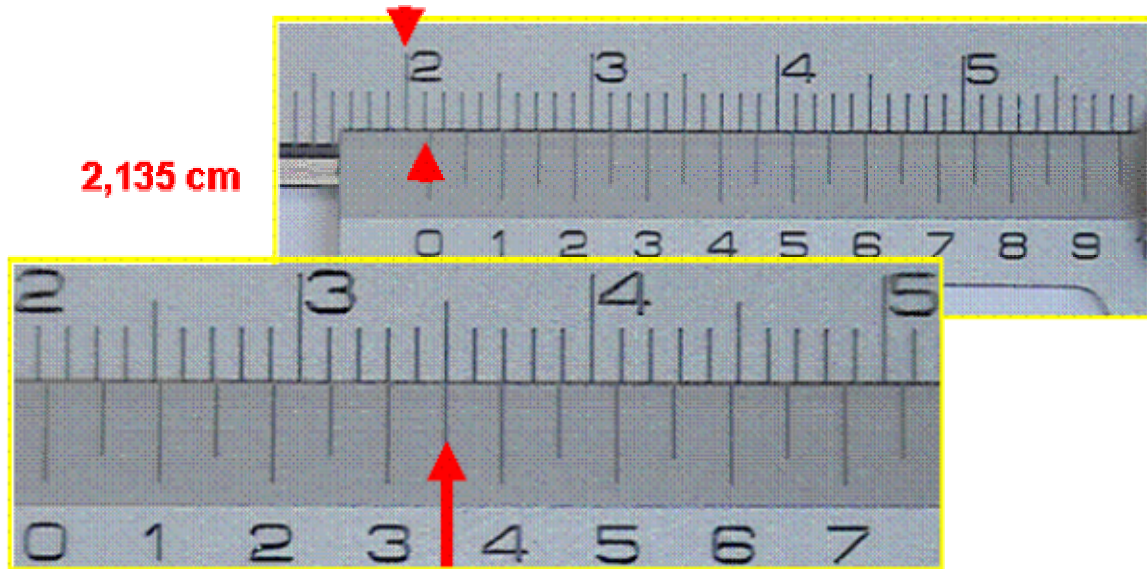
Il nonio viene graduato in modo tale che sia δ = 2 D - d cioè δ = 2 D - 39/20 D = D/20 = 50 µm !!!

Con il nonio abbiamo ottenuto un'amplificazione della scala e siamo in grado di apprezzare un ventesimo della divisione della scala principale.

Per comodità sul nonio non sono riportati i valori per tutte le tacche ma solo ogni 2 tacche: 2 divisioni corrispondono a 100 µm cioè un decimo di millimetro e alla lettura (in millimetri) della scala principale basta aggiungere i decimi di millimetro letti sulla scala riportata sul nonio.

A volte non si riuscirà a decidere se la coincidenza è fra una tacca del nonio o la successiva: si assumerà il valore intermedio come risultato della lettura (in questo strumento non ha senso parlare di lettura al decimo di divisione).

Supponiamo di eseguire una misurazione e di trovare il nonio nella posizione indicata nella foto. L'indice da utilizzare per la lettura sulla scala principale è dato dalla tacca 0 del nonio. Si legge una quantità leggermente superiore a 2,1 cm [14]; il nonio serve per valutare questo eccesso.

Come si vede nella foto in basso la tacca del nonio che meglio corrisponde a una qualsiasi tacca della scala principale ha l'indicazione compresa fra 3 e 4: si leggono 3,5 decimi di millimetro (0,035 cm). Quindi la lettura complessiva è 2,1 cm + 0,035 cm = 2,135 cm.

L'amplificazione del nonio è lecita solo se la precisione dello strumento lo consente: dovendo apprezzare i 50 µm, lo scorrimento del cursore, il parallelismo fra le ganasce, la leggibilità delle tacche e la precisione delle divisioni dovranno essere tali da introdurre errori inferiori alla decina di micron.

A questi livelli può non essere trascurabile la differenza fra la dilatazione termica dell'oggetto da misurare e quella dello strumento: la misura di un oggetto lungo 20 cm a 20°C risulta più grande di circa 10 µm se eseguita a 30°C.

Va infine prestata attenzione alla durezza del misurando per ridurre/correggere l'effetto dell'errore di inserzione.

[14] apprezzando il decimo di divisione si legge 2,13 cm

MICROMETRO o PALMER

Questo strumento sfrutta come amplificatore una vite: poiché ad ogni giro la punta della vite avanza di una lunghezza pari al passo, suddividendo in più parti l'angolo giro è possibile ottenere, con passi piccoli e suddivisioni angolari numerose, elevatissime sensibilità.

Il micrometro Palmer è costituito da una vite (terminante in un tamburo graduato in N parti), filettata con grande precisione, dalla sua madrevite (con incisa una scala con divisioni pari al passo; funge anche da indice per la scala sul tamburo) e da un supporto (ganascia) che consente di effettuare misurazioni con una portata di qualche centimetro.
Per lo strumento in dotazione al Laboratorio (portata 25 mm), il passo della vite è p = 0,5 mm e il giro completo è suddiviso in 50 parti e quindi ad ogni divisione corrisponde un avanzamento pari a $\delta = p/N = 0{,}5\text{mm}/50 = 10\ \mu\text{m}$.

L'elevata sensibilità (10 μm/div) dello strumento richiede una altrettanto notevole precisione nell'avanzamento della vite. Questa è ottenuta in seguito a una accurata lavorazione che deve evitare sia un gioco eccessivo che possibili impuntamenti.

La lettura dello strumento richiede particolare attenzione, non tanto per la lettura delle divisioni sul tamburo[15], quanto per quelle sulla scala principale: a causa dello spessore delle tacche lo sbaglio più frequente fra gli studenti è di contare un passo in più o in meno in corrispondenza dei valori sul tamburo prossimi allo zero[16].

A questi livelli di sensibilità va prestata anche molta attenzione nel ridurre gli errori sistematici[17]: sforzando eccessivamente la vite a fine corsa si può provocare una deformazione permanente della struttura dello strumento provocando uno spostamento sistematico dello zero.
Per questo motivo l'uso corretto richiede che si calcoli la media aritmetica di almeno una decina di misure[18] effettuate a sollecitazione nulla. Il valore ottenuto va sottratto, col segno, a tutti i valori letti.

---

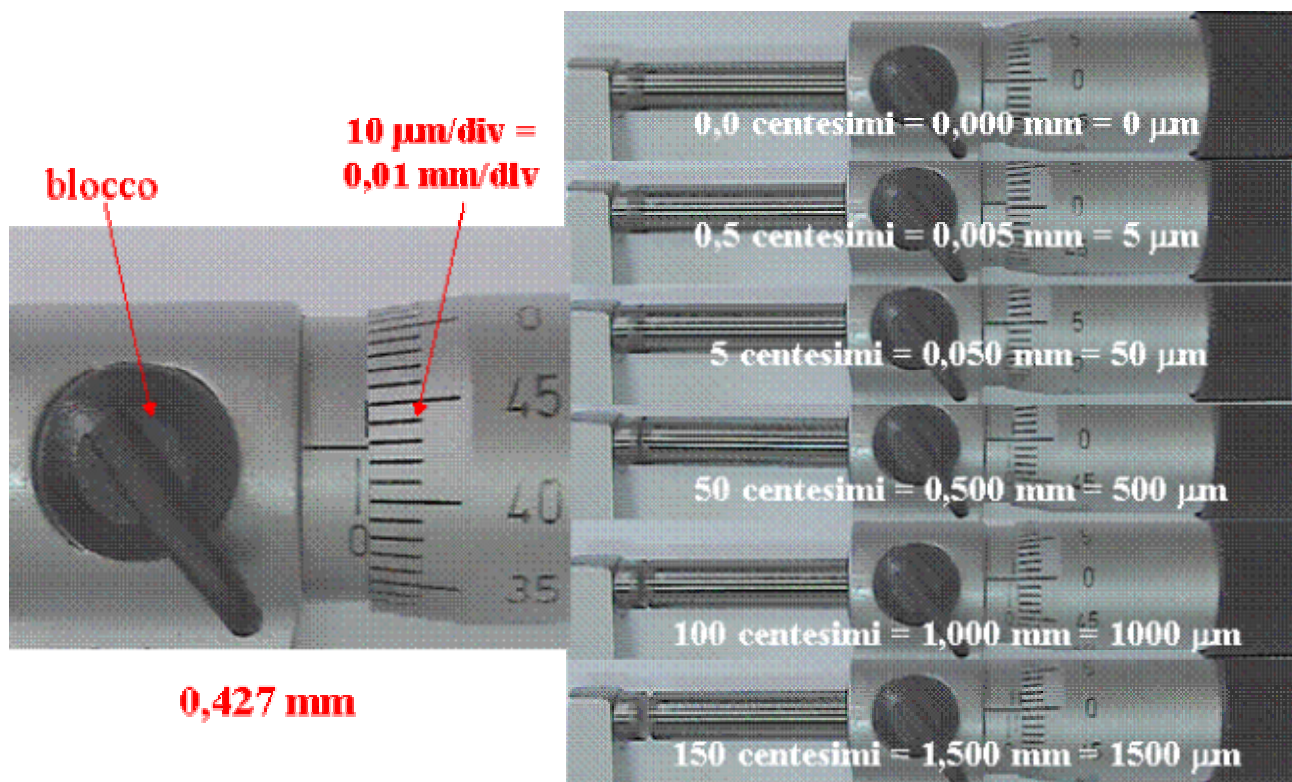
[15] ovviamente la lettura va eseguita al decimo di divisione: 0,01 mm/10 = 0,001 mm = 1 μm

[16] per evitare questo sbaglio grossolano di lettura dello strumento si consiglia di effettuare anche una misura approssimata leggendo solo la scala principale: è difficile sbagliarsi di 0,5 mm

[17] anche la dilatazione termica può alterare i risultati se lo strumento viene utilizzato a temperature troppo diverse da quella alla quale è stato graduato (20°C secondo la normativa DIN)

Qualora fosse necessario (non lo sarà in Laboratorio) si potrebbe invece eseguire un azzeramento dello strumento. Questa operazione consiste nel modificare lo strumento ruotando la madrevite all'interno della struttura per spostarla fino ad annullare lo zero dello strumento.

Per ridurre l'errore di inserzione è necessario controllare la pressione esercitata dalla punta della vite micrometrica sull'oggetto in misura . Per far questo la parte finale del tamburo è dotata di un meccanismo "a frizione" che impedisce di applicare un coppia troppo elevata.
In prossimità della posizione finale di lettura è anche necessaria una bassa velocità di rotazione del tamburo per evitare che l'energia cinetica acquisita consenta di superare la pressione che sarebbe stata regolata dalla frizione.

ESERCIZIO: a questo punto siete in grado di capire le fotografie del Palmer e interpretare l'indicazione dello strumento

[18] con una decina di misurazioni l'incertezza della taratura dello zero sarà trascurabile rispetto a quella delle altre misure effettuate con lo strumento; diversamente occorrerebbe tenerne conto e propagare anche l'incertezza dello zero

TERMOMETRO

Esistono diversi strumenti per la misura della temperatura. Quello che verrà utilizzato in Laboratorio è il termometro a mercurio[19]. Come noto esso è un termometro a liquido: è costituito da un contenitore di vetro (il bulbo, sensore) contenente un liquido le cui variazioni di volume sono legate a variazioni di temperatura (trasduttore temperatura-volume). Si ottiene un'amplificazione della risposta facendo dilatare il liquido all'interno di un cilindro cavo di piccola sezione interna (il capillare costituisce anche un trasduttore volume-lunghezza). L'indice dello strumento è costituito dall'altezza della colonna di mercurio all'interno del capillare.
I materiali dello strumento sono scelti tenendo conto del suo funzionamento: il tipo di vetro deve avere un basso coefficiente di dilatazione termica (trascurabile rispetto a quello del liquido termometrico); il liquido termometrico viene scelto in base all'intervallo termico in cui opererà lo strumento: non deve né solidificare né vaporizzare e, per ottenere una scala lineare, deve avere caratteristiche termiche (conducibilità e dilatazione termica) costanti nell'intervallo.

Supponiamo, per semplicità, che alla temperatura T_0 tutto il mercurio sia contenuto nel volume del bulbo V_B: $V(T_0) = V_B$. Alla generica temperatura T esso invece occuperà[20] anche un tratto di altezza h(T) del capillare: $V(T) = V_B + \sigma\, h(T)$ dove σ indica la sezione del capillare.
Inoltre, a partire dal coefficiente di dilatazione cubica λ (λ=1,8x10^{-4}/K), il volume del mercurio potrà essere calcolato come[21] $V(T) = V(T_0)\,[1 + \lambda\,(T-T_0)]$.
Dalle relazioni precedenti si ottiene la **funzione di risposta** del termometro $h(T) = V_B\,\lambda\,(T-T_0)/\sigma$.

Per definizione la sensibilità di uno strumento è data dal rapporto fra la variazione dell'uscita (risposta, indicazione, …) dello strumento **u**(g) e la variazione infinitesima della grandezza **g** in misura. Dato che in un termometro a liquido la grandezza g è la temperatura T e la risposta è data dal livello del liquido nel capillare h(T), si ottiene per la sensibilità del termometro la relazione:
$s = \partial \mathbf{u}(g)/\partial \mathbf{g} = \partial h(T)/\partial T = V_B\,\lambda\,/\sigma$.
Come esempio consideriamo V_B = 0,5 cm^3. Per una variazione di 1°C = 1 K la variazione di volume è di soli 0,9x10^{-4} cm^3 (0,018 %), quantità di difficile misurazione se non venisse utilizzato per esempio un capillare di diametro 100 μm col quale si ottiene invece una sensibilità $s \approx 1$ cm/K. Anche un aumento di V_B innalzerebbe la sensibilità; scelto il liquido termometrico resta invece fissato il valore di λ.

La precisione del termometro è sostanzialmente legata alla sezione del capillare. Quando questa diventa piccola si manifestano infatti errori dovuti alla inevitabile differenza di sezione lungo la colonna (una variazione del diametro di 5 μm è in assoluto molto piccola ma per un diametro di 100 μm rappresenta una variazione della sezione del 10% !!!).
Un primo effetto consiste nella irregolarità dell'avanzamento del mercurio al variare della temperatura: occorre un eccesso di incremento di temperatura per superare un restringimento del

---

19 è sostanzialmente dello stesso tipo del termometro clinico: le uniche differenze sono il diverso campo di misura e il fatto che il termometro clinico è un termometro "a massima" (indica cioè, nel caso di una temperatura variabile nel tempo, il valore massimo; prima del suo utilizzo deve quindi essere azzerato)

20 considerando trascurabile la dilatazione termica del vetro

21 è la legge di dilatazione dei corpi: uno degli effetti della variazione di temperatura di un corpo è la sua deformazione. Tale deformazione è spesso accompagnata da una variazione di volume. Per variazioni di temperatura non troppo elevate la variazione di volume è in molti materiali abbastanza lineare (sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine …)

capillare e un eccesso di decremento di temperatura per superarlo nell'altro verso; siamo in presenza di un errore di mobilità.
Una seconda causa di imprecisione è la non perfetta riproducibilità, fra strumento e strumento della stessa produzione, del bulbo e del capillare. Il costruttore nel realizzare strumenti di serie, anziché tarare singolarmente ogni strumento, considera le piccole differenze fra strumento e strumento come imprecisioni e ne tiene conto nel fissare le divisioni sulla scala che ne individuano la sensibilità.

L'accuratezza del termometro risente della differenza fra la curva di graduazione del capostipite di serie e quella dello strumento in uso. In particolare una piccola variazione del volume del bulbo si traduce in notevole variazione dell'indicazione fornita dallo strumento (errore di taratura). Tipicamente per sensibilità della scala 1/s = 0,1 °C/div può essere presente un effetto sistematico di vari decimi di grado. Poiché quest'errore comporta sostanzialmente solo una traslazione della scala conviene considerare, ove possibile, solo differenze di temperature[22]. Qualora invece fosse necessario utilizzare più termometri contemporaneamente occorre intercalibrarli: vengono cioè sollecitati alla stessa temperatura e si annota la differenza delle indicazioni per poter poi raccordare con questa le misure fornite da ciascuno di essi.

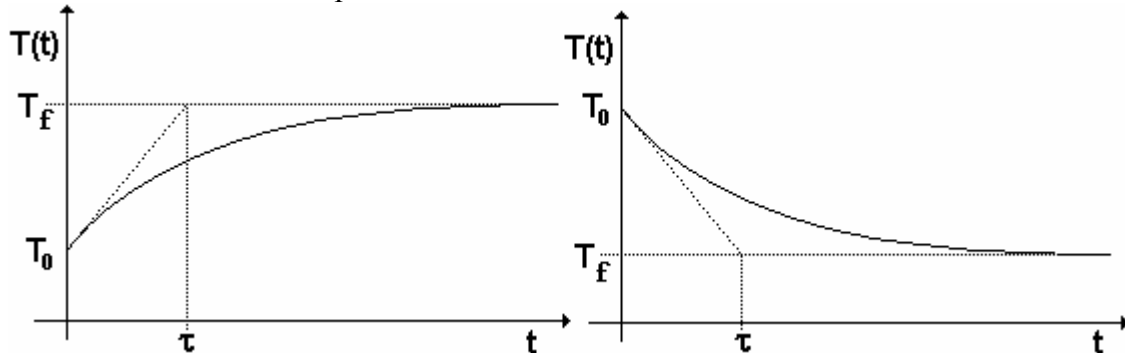
Un altro errore sistematico è quello di inserzione. Supponiamo di voler misurare la temperatura T_X di un corpo di capacità termica C mediante un termometro di capacità termica C_T, inizialmente alla temperatura T_0. All'equilibrio termico, ipotizzando il sistema isolato, tutto il calore ceduto/assorbito dal corpo sarà stato assorbito/ceduto dal termometro che avrà quindi innalzato/diminuito la sua temperatura portandosi a quella finale del T_f del corpo:
dall'uguaglianza dei calori scambiati[23] $C\,(T_X - T_f) = C_T\,(T_f - T_0)$ si ricava $T_f = \dfrac{C\,T_x + C_T\,T_0}{C + C_T}$.
Questo passaggio di calore consente al termometro di "sentire" la differenza di temperatura T_X-T_0 ma comporta anche la variazione della temperatura del corpo da T_X a T_f; non tenerne conto introdurrebbe un errore di inserzione $\Delta T = T_f - T_X$ che potrebbe essere apprezzabile in strumenti molto sensibili.
Invertendo la relazione precedente si ottiene la formula correttiva $T_X = T_f + \dfrac{C_T}{C}(T_f - T_0)$ (da applicare ai valori misurati T_f) dalla quale si evidenzia come l'errore di inserzione sia tanto più trascurabile quanto più la capacità termica del termometro è piccola rispetto a quella del corpo in misura e quanto più la temperatura iniziale del termometro è prossima a quella di equilibrio (e quindi a quella iniziale e incognita del corpo).

Consideriamo ora, invece, l'evoluzione temporale della risposta dello strumento. Per semplicità mettiamoci in condizioni tali da poter trascurare l'errore di inserzione supponendo di voler misurare la temperatura T_f di un corpo di capacità termica infinita (termostatato) con un termometro posto inizialmente alla temperatura T_0.

Iniziamo ad esaminare il fenomeno dal momento dell'inserzione dello strumento: al generico istante t la temperatura T(t) del termometro (e quindi il valore da lui indicato) dipenderà dalla sua capacità termica C_T (la somministrazione di una quantità infinitesima di calore produrrà un incremento infinitesimo di temperatura secondo la $\delta Q = C_T\,dT$) e dalla rapidità dello scambio di calore fra corpo in misura e strumento. Questo, in prima approssimazione[24], varrà:

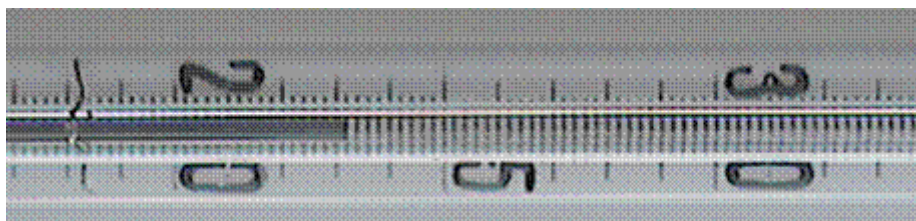
$$\frac{\delta Q}{dt} = -\frac{k\,S}{L}[T(t) - T_f]$$

22 in questo caso l'incertezza potrà essere stimata trascurando questo errore sistematico che scompare per differenza
23 perché un corpo di capacità termica C vari la sua temperatura di una quantità $T - T_0$ occorre fornirgli una quantità di calore $Q = C\,(T-T_0)$. Per un corpo di massa m, la capacità termica C è pari al prodotto della sua massa per il suo calore specifico c: $C = m\,c$
24 al solito è il primo termine di uno sviluppo in serie di Taylor

in cui k è la conducibilità termica del materiale (vetro nel nostro caso) attraverso cui avviene la conduzione del calore, S è la superficie di scambio e L rappresenta il valore medio dello spessore del materiale attraverso il quale avviene lo scambio di calore (vetro del bulbo).
Dalle due relazioni si ottiene l'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti: $\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{k\ S}{L\,C_T}[T(t) - T_f]$ da cui si ottiene $\boxed{T(t) = T_f - (T_f - T_0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$ dove $\tau = \frac{L\,C_T}{k\ S}$ è la costante di tempo del termometro[25] che dipende solo dalle caratteristiche costruttive dello strumento.

La temperatura di equilibrio viene raggiunta dopo un tempo infinito!!! In pratica si considera raggiunto l'equilibrio quando non si nota più alcuna variazione della temperatura.
Dopo un tempo pari a τ la differenza T- T_f si è riduce a 1/e volte la differenza iniziale: occorre attendere alcune costanti di tempo prima che la misura risulti accurata:

t (τ)	$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f}$		
1	1/e	=	36,79%
2	$1/e^2$	=	13,53%
3	$1/e^3$	=	4,98%
4	$1/e^4$	=	1,83%
5	$1/e^5$	=	0,67%

leggere prima di t = ∞ introduce un errore sistematico di rapidità.
Qualora fosse necessario eseguire misure di temperatura rapidamente variabili nel tempo sarebbe quindi necessario un termometro molto pronto (piccola costante di tempo).

Riassumendo: la sensibilità di un termometro aumenta se diminuisce la sezione del capillare (ma questo comporta una minore precisione) o se aumenta il volume del liquido termometrico nel bulbo (ma questo aumento implica maggiore capacità termica e quindi errori di inserzione maggiori e minore prontezza).

ATTENZIONE i termometri utilizzati in Laboratorio non sono a massima come quelli clinici: l'altezza della colonnina dipende solo dalla temperatura del bulbo (**non occorre "scaricare" il termometro**).
Inoltre hanno una sensibilità (della scala) di 0,2°C/div ma le divisioni sono troppo piccole perché se ne possa apprezzare un decimo; **leggete alla mezza divisione (0,1°C)**

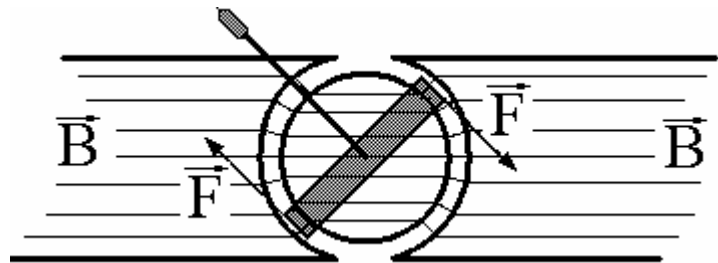
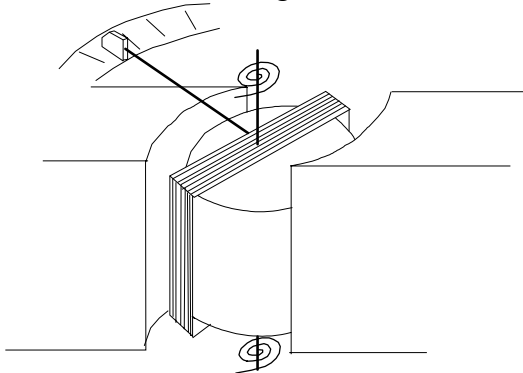
[25] è istruttiva la verifica dimensionale di questa relazione: la costante di tempo è un tempo?

AMPEROMETRO (a bobina mobile)

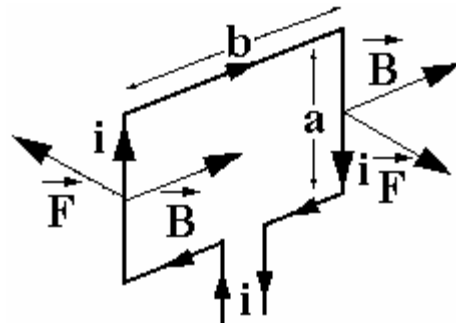
Un amperometro a bobina mobile è costituito sostanzialmente da una bobina piatta rettangolare formata da un certo numero di spire avvolte su un piccolo telaio capace di ruotare intorno ad un asse verticale.

La bobina è immersa in un campo magnetico costante prodotto dalle espansioni di un magnete permanente e da un cilindretto di ferro dolce posto fra queste. Lo scopo del cilindro di ferro dolce e della particolare forma delle espansioni del magnete è di modificare le linee del campo in modo tale che nel traferro il vettore induzione magnetica **B** sia sempre perpendicolare alle due superficie.

Il telaietto ruota quasi a contatto del cilindretto. In assenza di corrente la posizione della bobina è fissata dalla posizione di riposo di due molle. Al passaggio, nell'avvolgimento, della corrente elettrica in misura, la bobina viene sollecitata a ruotare intorno all'asse dalla forza di natura elettromagnetica mentre le molle esercitano una forza elastica di richiamo.

L'uscita analogica è determinata dall'angolo formato da un indice solidale col telaietto.

Applicando la seconda formula di Laplace a uno dei tratti verticali **a** delle spire, risulta che **F = i a B** (**a** e **B** sono perpendicolari) e quindi, considerando una bobina costituita da N spire, si ha **F = N i a B**.

Grazie al particolare orientamento di **B** nel traferro, le forze del tratto ascendente e quello discendente sono antiparallele e costanti al variare dell'orientazione del telaietto. Formano una coppia di momento **M = F b** (F e b sono perpendicolari).

Le forze agenti sui lati orizzontali della bobina sono dirette secondo i perni e formano una coppia di braccio nullo. Perciò, se il telaio è sufficientemente rigido, esse non producono alcun effetto (né moto, né deformazione).

Il momento totale è quindi **M = F b = N i a B b = Φ i** dove, per praticità, è stata definita la quantità **Φ = N a b B** pari al massimo flusso che potrebbe avere un campo uniforme e parallelo **B** attraverso la superficie di **N** spire di superficie **a** x **b**.

Φ è una quantità che dipende solo dalle caratteristiche costruttive dell'amperometro.

In questo strumento la bobina immersa nel campo magnetico costituisce il <u>sensore</u> che trasduce anche la corrente in una coppia meccanica[26]; il numero di spire e la loro sezione <u>amplificano</u> tale coppia; il sistema di molle, trasformando la coppia motrice in una deviazione angolare è un altro trasduttore. La lettura dell'indicazione deve essere effettuata ad indice fermo.

[26] ovviamente se viene invertito il verso della corrente cambiano verso anche le forze e quindi il momento della coppia e la direzione del moto ...

Nelle condizioni di funzionamento dello strumento, con buona approssimazione:
1) gli angoli ϑ descritti dall'equipaggio mobile intorno all'asse di rotazione sono sufficientemente piccoli in modo da poter ritenere che le molle a spirale lavorino entro i limiti di elasticità; ossia, che la coppia elastica m_e sia proporzionale alla deviazione angolare: $\mathbf{m_e = -c\,\vartheta}$
2) la velocità angolare dell'equipaggio mobile è limitata e quindi è lecito considerare la coppia frenante proporzionale alla velocità angolare: $\mathbf{m_f = -\beta\dot{\vartheta}}$
3) il momento delle forze di attrito dovuto al contatto tra perni e supporti è generalmente piccolo e costante: $\mathbf{m_a = \pm M_a}$ dove il segno ± è sempre tale da rallentare il moto.

Con queste ipotesi l'equazione del moto dell'equipaggio mobile (con momento di inerzia **I**) proiettata sull'asse di rotazione si scrive: $\mathbf{M + m_e + m_f + m_a = I\ddot{\vartheta}} \Rightarrow \mathbf{\Phi\, i - c\,\vartheta - \beta\dot{\vartheta} \pm M_a = I\ddot{\vartheta}}$
L'equazione del moto può essere studiata in maniera assai semplice se è possibile trascurare, come generalmente avviene, il termine di attrito fra perni e supporti rispetto a quello con il fluido:

$$\mathbf{I\ddot{\vartheta} + \beta\dot{\vartheta} + c\,\vartheta = \Phi\, i} \qquad \mathbf{1)}$$

A regime ($\ddot{\vartheta} = 0$ e $\dot{\vartheta} = 0$) l'equipaggio mobile raggiungerà la posizione di equilibrio θ_e calcolabile annullando le derivate nella 1): $\mathbf{c\,\theta_e = \Phi\, i}$. La posizione di equilibrio dell'indice è quindi $\mathbf{\theta_e = \Phi/c\ i}$ che rappresenta anche la **funzione di risposta** dello strumento. Derivando la funzione di risposta rispetto alla sollecitazione (la corrente **i**) si ottiene la sensibilità s = **Φ/c** che risulta costante per tutti i valori di corrente (scala lineare).

L'evoluzione temporale della risposta dello strumento è determinata dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti rappresentata dalla **1)**.

Nel caso in cui l'intensità di corrente in misura non vari nel tempo, l'andamento temporale $\vartheta(t)$ è determinato dal segno del discriminante $\beta^2 - 4\,I\,c$. Tipicamente esso viene reso dal costruttore leggermente negativo per avere uno smorzamento sottocritico che produce un andamento pseudo-periodico e quindi consente un rapido raggiungimento della posizione di equilibrio[27]. Inoltre, in questo caso, poiché l'equipaggio mobile oltrepassa nel suo moto oscillatorio la posizione finale di equilibrio, l'osservatore acquista la certezza che il moto dell'equipaggio è libero da impedimenti occasionali che potrebbero alterare l'entità della deviazione finale.

Qualora invece la sollecitazione fosse funzione del tempo: i = i(t), la risposta potrebbe essere analizzata in termini di componenti di Fourier.
Dall'analisi della **1)** con $i = i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ si ricaverebbe che solo le armoniche con pulsazione ω:

$$\omega << \omega_N = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

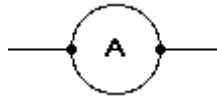
verrebbero riprodotte fedelmente e quindi una variazione di corrente molto rapida non produrrebbe la risposta dello strumento (che quindi si comporta come un filtro passa basso[28]).
Per avere quindi uno strumento rapido occorre una pulsazione naturale (quella alla quale oscillerebbe il sistema se non ci fossero attriti) ω_N grande, cioè c elevato e/o I piccolo. D'altra parte, però, un piccolo momento di inerzia I implica un equipaggio "leggero": poche spire di piccola superficie; ciò va ovviamente a scapito di una elevata sensibilità che richiede il contrario dato che $\Phi = N\,a\,b\,B$.

---

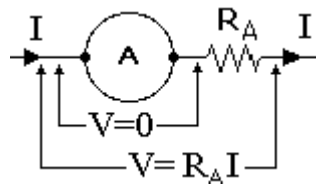
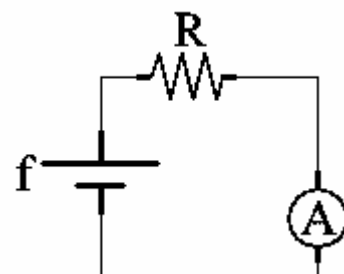
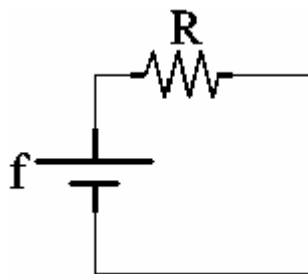
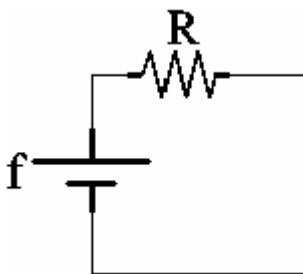
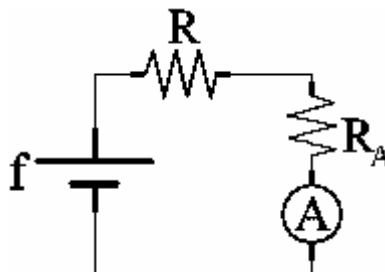
[27] poiché in teoria la posizione finale viene raggiunta dopo un tempo infinito, più propriamente si deve dire che l'equipaggio mobile la raggiunge e nell'oscillazione si mantiene entro i limiti della sensibilità della scala (ad esempio il decimo di divisione)

[28] se la corrente variasse troppo rapidamente ($\omega > \omega_N$) l'indice dello strumento vibrerebbe e al limite si fermerebbe in corrispondenza del valore medio della corrente

AMPEROMETRO: MISURAZIONE DI CORRENTI

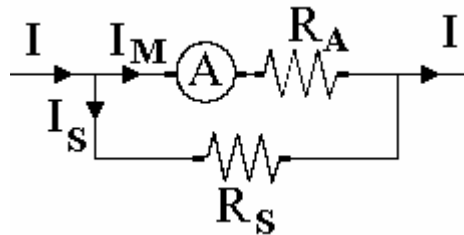
Analizziamo ora in dettaglio l'uso di un amperometro[29] il cui simbolo è:

Per misurare l'intensità di corrente che circola nel ramo di un circuito occorre dapprima interrompere il ramo in esame e quindi inserire lo strumento richiudendo il circuito.
Lo strumento misurerà la corrente che lo attraversa e quindi quella del ramo in cui è stato inserito.

Un amperometro ideale dovrebbe essere un dispositivo di resistenza equivalente nulla in grado cioè di misurare la corrente che lo attraversa senza provocare nessuna caduta di potenziale (cioè la tensione ai capi di un amperometro ideale è nulla).

L'amperometro reale, invece, non presenterà mai una resistenza nulla (si pensi alla resistenza del filo che costituisce la bobina avvolta sul telaietto). Per questo motivo può essere schematizzato come uno strumento ideale (ai cui capi V=0) con una resistenza R_A in serie (che realizza $V \neq 0$):

L'esistenza di questa resistenza produce degli errori di inserzione: consideriamo un circuito costituito da un generatore ideale di forza elettromotrice f e da una resistenza R[30] e chiudiamolo in modo tale che in esso possa scorrere corrente: I = f/R. L'amperometro ideale verrebbe attraversato dalla corrente I e indicherebbe la misura f/R.

Dopo l'inserzione dello strumento, la sua resistenza interna R_A apparirà in serie alla resistenza R e quindi verrà attraversato da una corrente inferiore: indicherà il valore $I_M = f/(R+R_A)$.

29 esistono diversi tipi di amperometri in cui il principio di funzionamento è simile se non coincidente con quello appena descritto

30 per il teorema di Thevenin questo rappresenta tutti i possibili circuiti costituiti solo da generatori e resistenze

Pertanto occorrerà[31] apportare la correzione: $I = I_M (1+R_A/R)$ dalla quale si nota come tanto più R_A è trascurabile rispetto ad R (avvicinandosi così ad un amperometro ideale[32]) e tanto più piccola sarà l'entità dell'errore.

Inoltre un amperometro reale ha, ovviamente, una portata limitata (spesso a qualche decina di microampere) a causa del compromesso fra la leggerezza della bobina e la sezione del conduttore che limita la massima corrente che può circolare senza fondere il filo. Come misurare quindi intensità di corrente più elevate? L'idea è quella di inserire in parallelo allo strumento una resistenza R_S (detta di "shunt"):

in questo modo la resistenza interna dell'amperometro R_A e R_S costituiscono un partitore di corrente: della corrente I in misura, la frazione $I_S = I\, R_A/(R_A+R_S)$ scorrerà nel ramo di shunt e la frazione $I_M = I\, R_S/(R_A+R_S)$ scorrerà nello strumento e verrà misurata. Ovviamente il costruttore indicherà sulla scala direttamente il valore $I_M (1+R_A/R_S)$. Ad esempio se in parallelo ad una resistenza R_A di 2000 Ω venisse posta una resistenza di shunt R_S = 20,2 Ω la portata dello strumento aumenterebbe di un fattore 100 [33].

Il cambiamento di scala ha anche un effetto positivo: ponendo R_S in parallelo ad R_A la resistenza equivalente dell'amperometro si riduce (nell'esempio precedente passerebbe da 2000 Ω a 20 Ω) e di conseguenza anche l'entità dell'errore di inserzione.

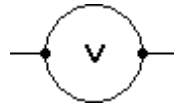
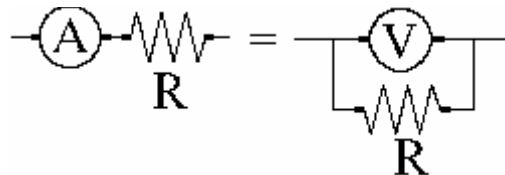
[31] ovviamente solo se, data la sensibilità dello strumento, tale correzione sarà apprezzabile

[32] una piccola resistenza R_A richiede un avvolgimento costituito da poche e piccole spire; un amperometro molto sensibile avrà una R_A elevata e quindi potrebbe introdurre grossi errori di inserzione

[33] ovviamente la classe di precisione dello strumento non cambia (se la resistenza di shunt è precisa e stabile) e quindi la sensibilità dello strumento si riduce dello stesso fattore 100

L'uso di alcune resistenze di precisione e di pochi altri componenti di basso costo consente di trasformare un amperometro in uno strumento universale o **tester**[34] in grado di misurare, tra l'altro, correnti e tensioni continue e resistenze[35].

REALIZZAZIONE DI UN VOLTMETRO MEDIANTE UN AMPEROMETRO

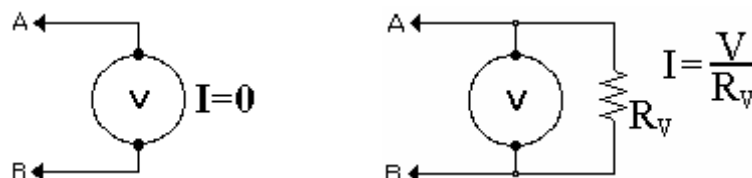
Un **voltmetro** è uno strumento atto a misurare differenze di potenziale. Il suo simbolo è:

Un tipo di voltmetri assai diffuso può essere realizzato a partire da un amperometro in base al seguente principio: se applichiamo una differenza di potenziale V ai morsetti di un amperometro di resistenza R lo strumento verrà attraversato da (e quindi misurerà) una intensità di corrente pari a $I_M = V / R$. A questo punto è sufficiente che il costruttore realizzi una scala di lettura indicando in corrispondenza delle misure I_M i valori $I_M \times R$ cioè la tensione applicata.

È chiaro quindi come l'elemento chiave di questo tipo di voltmetro sia la resistenza che opera la trasduzione tensione-corrente; l'amperometro posto in serie rappresenta il dispositivo di uscita.

VOLTMETRO: MISURAZIONE DI DIFFERENZE DI POTENZIALE (TENSIONI)

Analizziamo ora in dettaglio l'uso di un voltmetro.

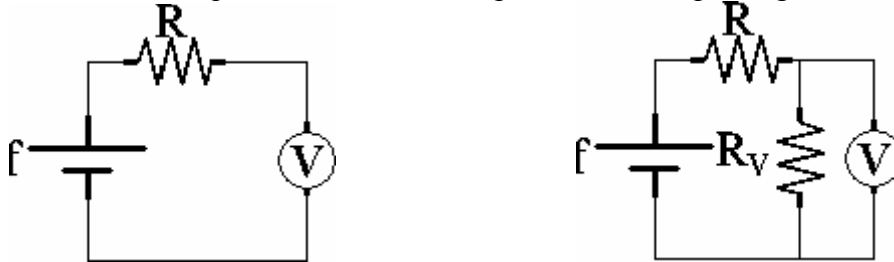
Per misurare la differenza di potenziale fra due punti A e B di un circuito, lo strumento va collegato connettendo i suoi due terminali a tali punti (connettendosi quindi in parallelo ad eventuali elementi circuitali presenti tra i punti A e B)

Un <u>voltmetro ideale</u> dovrebbe essere un dispositivo di resistenza equivalente infinita in grado cioè di misurare tensioni ai suoi terminali senza assorbire nessuna corrente.

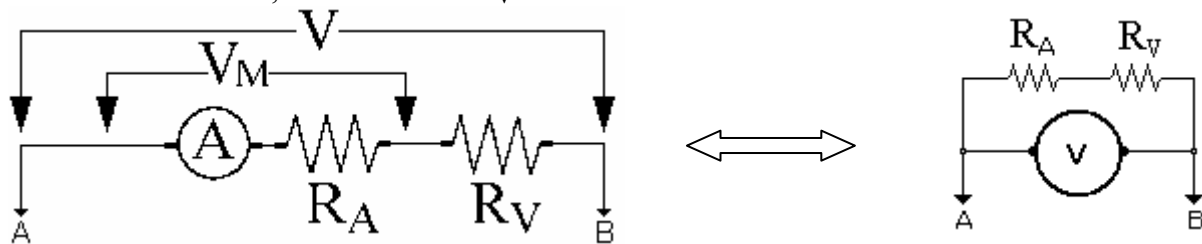
---

[34] lo strumento in dotazione in Laboratorio è un ICE 600 R. Le descrizioni di questo paragrafo, pur relative a questo strumento, possono essere estese a qualsiasi altro strumento analogico per misure di correnti, tensioni e resistenze con lo stesso principio di funzionamento. In particolare questo tester viene configurato inserendo in opportune boccole degli spinotti connessi con i puntali da misura; altri tester utilizzano diversi metodi di configurazione

[35] nel seguito verrà data una breve descrizione di come operare per effettuare tali misure mentre per le altre possibilità offerte dallo strumento si rimanda al suo manuale di istruzione.

Il voltmetro reale, invece, per poter funzionare deve essere attraversato da una corrente elettrica. Per questo motivo può essere schematizzato come uno strumento ideale (attraverso cui I=0) con in parallelo una resistenza R_V (che realizza $I \neq 0$).

L'esistenza di questa resistenza produce degli errori di inserzione: consideriamo al solito un generico circuito costituito da un generatore ideale di forza elettromotrice f con in serie una resistenza R.
Dato che il circuito, con inserito in serie il voltmetro ideale, è un circuito aperto in esso non scorre corrente e quindi la tensione ai capi della serie generatore-resistenza è pari ad f (nella resistenza non scorre corrente e quindi per la legge di Ohm non c'è differenza di potenziale ai suoi estremi). Il voltmetro ideale misurerebbe quindi la differenza di potenziale ai capi del generatore.

Se però la misura viene effettuata con un voltmetro reale (e quindi avente in parallelo una resistenza R_V), il circuito "serie del generatore e della resistenza R" non è più un circuito aperto: in esso scorre la corrente $I = f/(R + R_V)$. Questa corrente, in particolare, produce ai capi di R_V (e quindi del voltmetro che la misura) una tensione $V_M = R_V I = f\ R_V/(R + R_V)$.

Per compensare questo errore di inserzione, $V_M = V\ R_V/(R + R_V)$, si deve applicare la formula correttiva $V = V_M\ (1 + R/R_V)$ dalla quale si nota come quanto più R_V è grande rispetto ad R (avvicinandosi così a un voltmetro ideale) e tanto più piccola sarà l'entità dell'errore.

Dato lo schema del voltmetro anche esso, come l'amperometro che lo costituisce, ha una portata limitata (spesso a qualche decina di millivolt); come misurare quindi differenze di potenziale più elevate? L'idea è quella di inserire in serie alla resistenza R_A dell'amperometro che costituisce lo strumento, una resistenza R_V.

In questo modo la resistenza interna dell'amperometro (R_A) e R_V costituiscono un partitore di tensione: della differenza di potenziale V in misura, la frazione $V\ R_V/(R_A+R_V)$ apparirà ai capi di R_V e solo la frazione $V_M = V\ R_A/(R_A+R_V)$ sarà applicata ai capi dell'amperometro e della sua resistenza R_A venendo misurata. Ovviamente il costruttore indicherà sulla scala direttamente il valore $V_M\ (1 + R_V/R_A)$. Ad esempio se in serie alla resistenza R_A di 2 kΩ venisse posta una resistenza R_V = 198 kΩ la portata dello strumento aumenterebbe di un fattore 100[36].

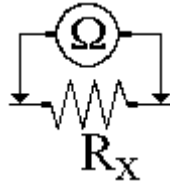
Anche nel caso del voltmetro il cambiamento di scala ha un effetto positivo: ponendo R_V in serie ad R_A la resistenza equivalente del voltmetro aumenta passando da R_A a R_A+R_V (nell'esempio precedente passerebbe da 2 kΩ a 200 kΩ) e di conseguenza si riduce l'entità dell'errore di inserzione.

---

[36] ovviamente la classe di precisione dello strumento non cambia (se la resistenza R_V è precisa e stabile) e quindi la sensibilità dello strumento si riduce dello stesso fattore 100

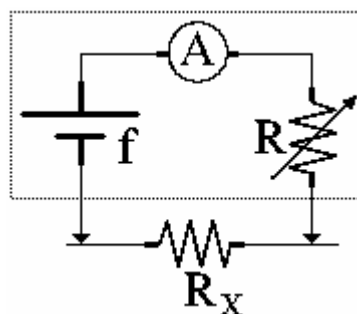
MISURAZIONE DI RESISTENZE

Analizziamo ora alcuni metodi frequentemente usati per misurare resistenze elettriche iniziando da quella effettuata con un ohmmetro.

Un **ohmmetro** è uno strumento atto a misurare resistenze elettriche. Il suo simbolo è:

• REALIZZAZIONE DI UN OHMMETRO MEDIANTE UN AMPEROMETRO

Lo strumento universale è dotato di una batteria interna mediante la quale è possibile effettuare misure di resistenza tramite la misura effettuata mediante l'amperometro dell'intensità di corrente che attraversa una resistenza collegata allo strumento.

La portata dello strumento (valore massimo misurabile) in questo caso non è definita perché con corrente nulla indicherà $R = \infty$ (se la resistenza è infinita non circolerà nessuna corrente). Si parla correttamente di portata perché l'estremo inferiore del campo di misura è dato da resistenza nulla: nella misurazione di una resistenza nulla lo strumento indica la massima corrente erogata dalla batteria interna e in corrispondenza a questo valore il costruttore riporta l'indicazione R=0.

Per effettuare la misura di una resistenza lo strumento va collegato connettendo i due terminali ai suoi estremi esercitando con i puntali una leggera pressione per ridurre l'effetto di eventuali strati di ossidi isolanti..
In uno schema semplificato lo strumento è costituito dalla serie di un amperometro, di un generatore di forza elettromotrice f e da una resistenza variabile R.

Quando la serie di elementi viene collegata ad una resistenza incognita R_X, il circuito si chiude e l'amperometro misura l'intensità di corrente I_M:

$$I_M = \frac{f}{R + R_X}$$ che è la funzione di risposta dell'ohmetro.

La sensibilità dell'ohmmetro (considerando la corrente I_M come grandezza di uscita) vale pertanto: $s = \partial \mathbf{u}(g)/\partial \mathbf{g} = \partial I_M/\partial R_X = - f/(R+R_X)^2$.
Sensibilità negativa significa che al crescere dell'ingresso diminuisce l'uscita; il fatto che sia funzione del misurando implica invece che la scala dello strumento non è lineare: il valore delle divisioni all'inizio della scala è diverso da quello delle divisioni prossime al valore di fondo scala.

In uno strumento con scala lineare e portata variabile è conveniente scegliere la portata per cui il valore indicato dallo strumento risulta quanto più possibile prossimo al valore di fondo scala. In questo modo infatti si ha la massima sensibilità dello strumento (e quindi la massima precisione) ottenendo la misura con l'incertezza relativa più piccola possibile.

Come operare nel caso dell'ohmmetro la cui scala è non lineare? Prima di rispondere a questa domanda dobbiamo considerare il fatto che la batteria che fornisce la forza elettromotrice nel tempo si scarica. Occorre pertanto, prima di ogni serie di misure, azzerare lo strumento. Occorre cioè agire sul valore della resistenza variabile R per compensare la variazione di forza elettromotrice. Nei tester analogici più recenti la regolazione di R è effettuata automaticamente; la regolazione manuale ancora in uso in alcuni modelli richiede invece di agire su una manopola che varia con continuità il valore di R.
In entrambi i casi l'azzeramento dello strumento richiede che il circuito dell'ohmmetro venga chiuso su una resistenza nulla. In queste condizioni circola la corrente $I = f / R$. Variando R si può fare in modo che questa corrente valga $I_{f.s.}$ cioè il valore massimo misurabile dall'amperometro (e l'indice dello strumento si troverà, per resistenza nulla, ad indicare la corrente massima). Dopo l'azzeramento, quindi, si ha: $f = I_{f.s.} R$. e la corrente misurata vale $I_M = I_{f.s.} \frac{R}{R + R_X}$ cioè una funzione del misurando R_X indipendente dal valore di f.

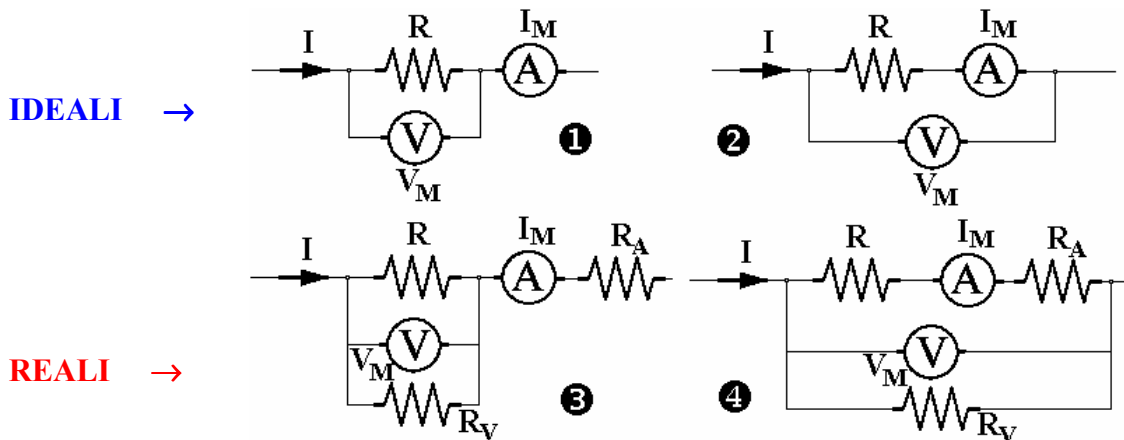
Stimiamo ora l'incertezza relativa da associare ad una misura effettuata con l'ohmetro: dalla relazione $I_M = I_{f.s.} \frac{R}{R + R_X}$ si ricava $R_X = R\left(\frac{I_{f.s.}}{I_M} - 1\right)$ dove l'unica grandezza che può variare a causa di errori casuali è I_M. Dalla deviazione standard σ_{Rx} ottenuta propagando l'incertezza σ_I di I_M:

$\sigma_{Rx} = R \frac{I_{f.s.}}{I_M^2} \sigma_I$ si ottiene l'incertezza relativa: $\frac{\sigma_{R_x}}{R_x} = \frac{\frac{I_{f.s.}}{I_M^2}}{\frac{I_{f.s.}}{I_M} - 1} \sigma_I = \frac{\frac{\sigma_I}{I_{f.s.}}}{\alpha(1-\alpha)}$ dove $\alpha = \frac{I_M}{I_{f.s.}}$ indica la posizione dell'indice sulla scala relativamente al valore del fondo scala ($0 < \alpha < 1$). Il numeratore $\sigma_I/I_{f.s.}$ è la stima dell'incertezza relativa di una misura di corrente pari al valore di fondo scala ed è pertanto legata alla classe di precisione dell'amperometro.
σ_{Rx} /R_x diverge per α prossima a zero (α piccola corrisponde a basse correnti, misurate quindi con una grossa incertezza percentuale) e α prossima a uno ($\alpha = 1$ corrisponde alla corrente di azzeramento dello strumento, cioè resistenza praticamente nulla e quindi σ_{Rx} /R_x tendente all'infinito); il minimo si ha a metà della scala ($\alpha = 0,5$).

In conclusione, utilizzando un ohmmetro che si basi sul principio di funzionamento descritto, è opportuno variare la scala dello strumento[37] al fine di effettuare la lettura fra il 20% e l'80% della scala.

37 nello schema semplificato che abbiamo visto non esiste la possibilità, che si ha negli ohmmetri reali, di variare la scala. Questa variazione consiste in un fattore moltiplicativo da applicare ai valori letti: gli estremi della scala sono sempre resistenza nulla e resistenza infinita

• MISURA DI RESISTENZE COL METODO VOLT-AMPEROMETRICO

Il metodo consiste nella misura indiretta di R derivata dalla legge di Ohm V = R I e dalle misure dirette di V e I. Sono possibili però diverse connessioni del voltmetro e dell'amperometro (vedi le connessioni 1 e 2)

Analizziamo i vari circuiti:

- nel primo il voltmetro (ideale) è posto ai capi di R e misura $V_M = I_R$ R mentre l'amperometro (ideale) misura la corrente I_M = I che scorre nel parallelo costituito dalla resistenza e dal voltmetro (nel quale, però, non scorre corrente e quindi $I_M = I_R$); pertanto $R_M = V_M/I_M = R$

- nel secondo l'amperometro (ideale) è posto in serie a R ($I_M = I_R$) mentre il voltmetro (ideale) misura la tensione ai capi della serie costituita da R e dalla resistenza dell'amperometro (che, però, è nulla e quindi $V_M = I_R$ R); pertanto $R_M = V_M/I_M = R$

- il terzo circuito corrisponde al primo ma è realizzato con strumenti reali. Quindi la corrente I attraversa il parallelo costituito da R e R_V: in questo caso l'amperometro misura ancora I_M = I ma il voltmetro $V_M = I\,R\,R_V/(R + R_V)$; pertanto $R_M = V_M/I_M = R\,R_V/(R + R_V)$

- il quarto circuito corrisponde al secondo ma è realizzato con strumenti reali. Quindi l'amperometro misura ancora $I_M = I_R$ mentre il voltmetro, applicato ai capi della serie di R e R_A misura $V_M = I_R\,(R + R_A)$; pertanto $R_M = V_M/I_M = R + R_A$

Riassumendo:

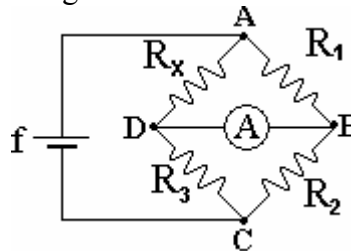
- nel caso di strumenti ideali la misura derivata corrisponde al valore vero indipendentemente da quale connessione si utilizzi per le misure dirette di I e V

- nel terzo schema la resistenza del voltmetro perturba la misura dell'amperometro (una frazione della corrente misurata non scorre in R ma in R_V). La misura derivata non è accurata perché corrisponde al parallelo di R e R_V (se $R \ll R_V$ l'errore di inserzione diventa trascurabile)

- nel quarto schema la resistenza dell'amperometro perturba la misura del voltmetro che misura la somma delle tensioni ai capi di R e di R_A. La misura derivata non è accurata perché corrisponde alla serie di R e R_A (se $R \gg R_A$ l'errore di inserzione diventa trascurabile)

Quindi, a seconda del valore di R conviene utilizzare uno schema o l'altro. In particolare per R piccole conviene il terzo schema mentre per R elevate risulta più accurato il quarto.

• MISURA DI RESISTENZE COL PONTE DI WEATHSTONE

Per la misura di resistenze molto elevate o molto piccole e per alcune applicazioni particolari è utilizzata una misura indiretta della resistenza: viene posta all'interno di un circuito che opera un confronto fra la resistenza incognita e altre resistenze note.

La resistenza incognita R_X viene posta in uno dei rami (bracci) del ponte. Negli altri tre rami sono poste resistenze di precisione note che possono essere variate in modo discreto (R_1 e R_2) o quasi continuo (R_3). Tra i punti B e D viene posto un amperometro molto sensibile e con zero centrale in modo da poter facilmente indicare se scorre corrente e in quale verso.

Ipotizziamo di variare i valori delle tre resistenze fino a realizzare il bilanciamento del ponte indicando con questo termine la condizione di equipotenzialità dei punti B e D. A ponte bilanciato nell'amperometro non scorre corrente.

In che relazione devono essere i valori dei componenti del circuito affinché il ponte sia bilanciato?
Riflettiamo sul fatto che a ponte bilanciato tutta la corrente che scorre in R_1 scorre anche in R_2 (le due resistenze sono in serie!) e quindi la differenza di potenziale ai capi di R_2 vale $f\,\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$.

Analogamente la differenza di potenziale ai capi di R_3 vale $f\,\dfrac{R_3}{R_X+R_3}$.

Data l'equipotenzialità dei punti B e D le tensioni ai capi di R_2 e R_3 devono essere uguali e quindi:

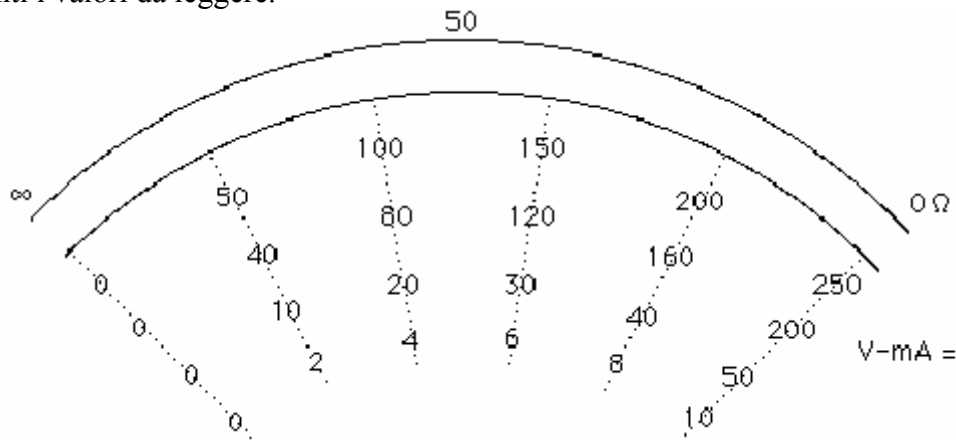
$\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_X}{R_3}$ da cui $\boxed{R_X = R_3\dfrac{R_1}{R_2}}$ cioè: note R_2 e R_3 è misurata R_X.

Come si nota i valori di R_1e R_2 compaiono sotto forma di rapporto (vengono detti bracci a rapporto) e determinano l'ordine di grandezza della resistenza R_X (per esempio con pochi valori come 1 Ω, 10 Ω, 100 Ω, 1 kΩ, 10 kΩ, 100 kΩ, può essere in linea di principio esplorato un intervallo pari a 10 ordini di grandezza!!!).

In molte applicazioni si sfrutta la sensibilità del ponte per amplificare piccole variazione della resistenza incognita. A volte come strumento di zero si preferisce utilizzare un voltmetro molto sensibile.

Esistono altri strumenti di misura che utilizzano configurazioni a ponte. In tutti uno strumento di zero indica quando una particolare combinazione dei valori di alcuni componenti uguaglia quello di una grandezza fisica incognita.

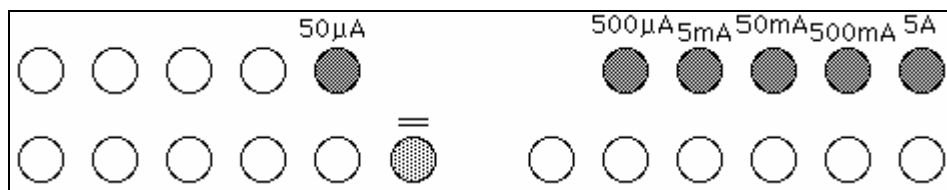
PANNELLO (semplificato) DEL TESTER IN DOTAZIONE

Per poter eseguire misure su portate diverse lo strumento è fornito di una scala graduata e di più scale indicanti i valori da leggere.

Consideriamo come esempio la configurazione voltmetro. Qualora venga scelta la portata 250 V la lettura verrà effettuata sulla scala contrassegnata da "V - mA =" il cui valore di fondo scala è 250; se la portata è 200 V occorrerà effettuare le letture sulla scala terminante col valore 200; e analogamente per le portata 50 V e 10 V.

Per la portata 2 V si può leggere sulla scala 200 e dividere il risultato per 100; per la portata 100 mV la scala da utilizzare è quella terminante con 10 ed occorrerà moltiplicare per 10 il risultato.

Nella configurazione ohmmetro è riportata una sola scala[38]: i valori letti vanno moltiplicati per il fattore moltiplicativo (Ω x 1; Ω x 10; Ω x 100; Ω x 1000) scelto.

Le indicazioni in rosso si riferiscono a misure in corrente alternata.

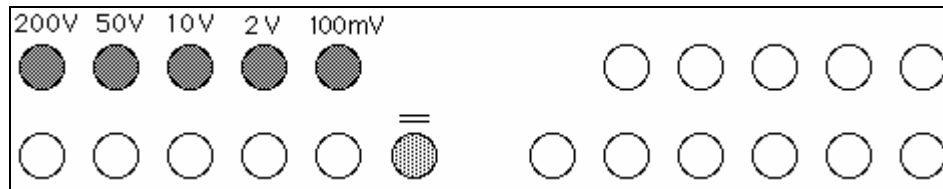
MISURE DI CORRENTI CONTINUE [V-mA =]

Per configurare il tester come amperometro occorre inserire gli spinotti collegati ai puntali nelle apposite boccole: lo strumento prevede che una corrente positiva entri nella boccola con contrassegnato il valore del fondo scala e che esca dalla boccola contrassegnata da " = ".

Il valore della resistenza interna R_A dipende dalla portata scelta per l'amperometro.
Lo strumento a disposizione ha una R_A determinabile dalla seguente tabella:

portata:	50 µA	500 µA	5 mA	50 mA	500 mA	5 A
R_A	2 000 Ω	588 Ω	63,5 Ω	6,4 Ω	0,64 Ω	0,064 Ω

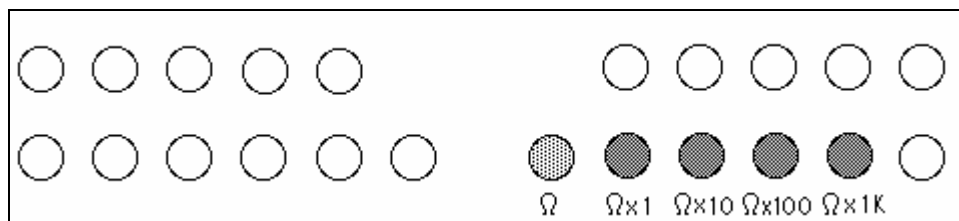
38 notare come la scala non sia lineare e come, al crescere di R, l'indice si sposti da destra a sinistra

Qualora non sia noto l'ordine di grandezza del valore da misurare è buona norma, per evitare di danneggiare uno strumento, iniziare la misura dalla portata più alta per poi scendere, se possibile, a quella con la quale è possibile ottenere la maggiore sensibilità.

MISURE DI TENSIONI CONTINUE [V-mA=]

Per configurare il tester come voltmetro occorre inserire gli spinotti collegati ai puntali nelle apposite boccole: lo strumento prevede che una corrente positiva entri nella boccola con contrassegnato il valore del fondo scala e che esca dalla boccola contrassegnata da " = ".

Il valore della resistenza Rv dipende dalla portata scelta per il voltmetro. Lo strumento in dotazione ha una Rv pari al valore di fondo scala moltiplicato per **20 000 Ω/V**; p.es. col fondo scala 2 V si ha Rv = 40 000 Ω

Qualora non sia noto l'ordine di grandezza del valore da misurare è buona norma, per evitare di danneggiare uno strumento, iniziare le misura dalla portata più alta per poi scendere, se possibile, a quella con la quale è possibile ottenere la maggiore sensibilità.

MISURE DI RESISTENZE [Ω]

Per configurare il tester come ohmmetro occorre inserire gli spinotti collegati ai puntali nelle apposite boccole: lo strumento misura una resistenza (nella quale non scorre corrente) posta tra i puntali collegati uno alla boccola "Ω" e l'altro alla boccola col fattore moltiplicativo scelto.

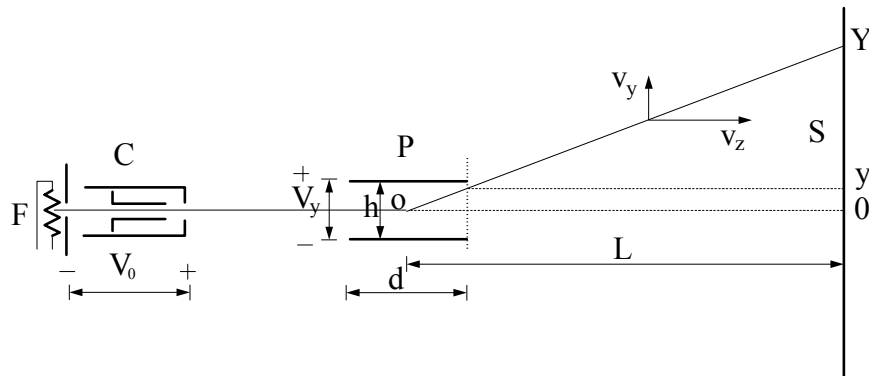
Nel caso di misure di resistenze lo strumento è fornito di un'unica scala e i valori letti andranno moltiplicati per il fattore selezionato utilizzando l'opportuna boccola.

Per non danneggiare lo strumento (oltre che per misurare ciò che si vuole ...) occorre che la resistenza non sia in parallelo ad altre e che in essa non scorra corrente.

Prima dell'uso lo strumento va azzerato: si cortocircuitano i puntali dopo aver selezionato un fattore moltiplicativo. Negli strumenti con regolazione automatica è sufficiente mantenere per qualche secondo la condizione di cortocircuito; in quelli manuali va regolata la resistenza variabile fino a vedere indicata resistenza nulla.

OSCILLOSCOPIO (a raggi catodici)

È uno strumento assai versatile per misurare differenze di potenziale variabili nel tempo.

La parte principale di un oscillografo è costituita da un tubo a raggi catodici sul cui schermo (S) viene visualizzata la grandezza in esame. Esso è costituito da un'ampolla di vetro, nella quale è stato praticato il vuoto, fornita di un dispositivo, detto cannone elettronico (C), che produce un fascio di elettroni di velocità circa uguale tra loro e collimato sul punto centrale 0 dello schermo.

Il cannone è a sua volta costituito da un filamento F che riscaldato per effetto Joule emette elettroni per effetto termoelettrico e da alcuni elettrodi di forma, dimensioni e posizioni diverse, che servono ad accelerare gli elettroni (l'elettrodo acceleratore è posto ad una tensione V_0), a regolarne il flusso e a collimarli sullo schermo.

Subito dopo il cannone gli elettroni passano tra due coppie ortogonali di placchette P_x, P_y (per chiarezza nel disegno è raffigurata solo la coppia di placchette che agisce nel piano YZ dove Z è l'asse orizzontale che va da F a O).

Consideriamo ora il moto di un elettrone quando passa tra le due placchette verticali alle quali sia applicata una tensione V_y.
L'elettrone esce dal filamento F con velocità trascurabile e accelera a causa della differenza di potenziale tra il filamento e l'ultimo anodo del cannone (l'energia cinetica all'uscita del cannone sarà $\frac{1}{2}m\,v_z^2 = e\,V_0$) quindi procede verso lo schermo con velocità costante $v_z = \sqrt{2\frac{e}{m}V_0}$ finché non entra nella regione delle placchette di deflessione dove, a causa della tensione V_y, è presente il campo elettrico $E_y = \frac{V_y}{h}$.

A questo punto la traiettoria, prima rettilinea, diventa parabolica. All'interno delle placchette le equazioni del moto sono infatti:

$$a_z(t) = 0 \qquad\qquad v_z(t) = v_z = \sqrt{2\frac{e}{m}V_0}$$

$$a_y(t) = a_y = F_y/m = E_y\frac{e}{m} = \frac{e}{m}\frac{V_y}{h} \qquad\qquad v_y(t) = a_y\,t = \frac{e}{m}\frac{V_y}{h}t$$

dove t varia fra 0 (l'elettrone entra nelle placchette) e t_M (l'elettrone esce dalle placchette).

Poiché lungo l'asse Z non agiscono forze, il moto lungo tale asse, dall'uscita del cannone all'arrivo sullo schermo, si svolge con v_z costante. In particolare la lunghezza d delle placchette sarà percorsa in un tempo $t_M = \frac{d}{v_z}$.

La presenza nelle placchette del campo lungo l'asse Y, invece, produce una variazione di velocità v_y che all'uscita delle placchette vale $v_y(t_M) = \frac{V_y}{h}\frac{e}{m}t_M$; la quota di uscita dalle placchette, a causa del moto parabolico, sarà $y = \frac{1}{2}\,a_y\,t_M^2$.

Dopo l'uscita dalle placchette il moto di ogni elettrone sarà rettilineo uniforme:

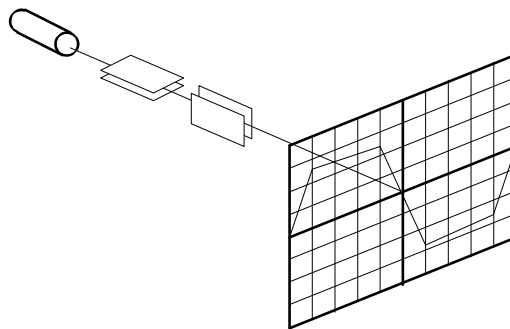
$v_z = \sqrt{2 \frac{e}{m} V_0}$ $v_y(t_M) = \frac{e}{m} \frac{V_y}{h} t_M$; pertanto $\dfrac{Y - y}{L - \frac{d}{2}} = \dfrac{v_y(t_M)}{v_z}$ da cui

$$Y = (\tfrac{1}{2} a_y \; t_M^2) + (L - d/2) \frac{v_y(t_M)}{v_z} = \frac{Ld}{2h} \frac{V_y}{V_0}$$

Pertanto la funzione di risposta dell'oscilloscopio è $Y = \dfrac{Ld}{2h} \dfrac{1}{V_0} V_y$.

La costante che moltiplica V_y è chiamata "fattore di deflessione"[39]: la quota Y misurata sulla scala dello strumento è proporzionale, attraverso tale fattore, alla tensione applicata alle placchette di deflessione verticale. La sensibilità, $s = \partial Y / \partial V_y$ è pari al fattore di deflessione che, essendo costante al variare della tensione, produce una scala lineare.

In realtà, per estendere le portate dello strumento, alle placchette verticali non viene applicata direttamente la tensione in misura ma una tensione amplificata/attenuata mediante appositi circuiti elettronici.

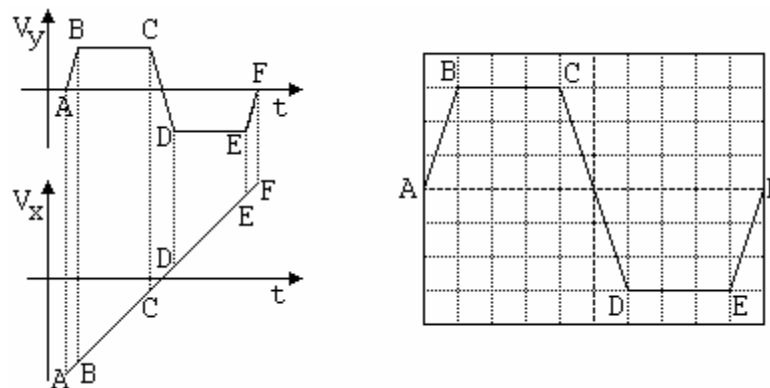
Oltre alla coppia di placchette per la deflessione verticale ne esiste un'altra che, con le stesse modalità, consente di spostare lungo l'asse orizzontale dello schermo il punto luminoso generato dal fascetto di elettroni. L'entità di tale spostamento è proporzionale alla tensione applicata alle placchette di deflessione orizzontale.

Vediamo cosa succede se si applica alle placchette di deflessione orizzontale una differenza di potenziale crescente linearmente (rampa lineare) da una tensione minima V_{min} a una massima V_{MAX}.

In corrispondenza di V_{min} il fascetto di elettroni compare a sinistra dello schermo; mentre la tensione cresce il punto si sposta verso destra (quando la tensione è nulla non c'è deflessione e il punto luminoso appare al centro dello schermo); alla fine della rampa il punto si troverà a destra dello schermo.

In altre parole la coordinata orizzontale dello schermo è proporzionale alla tensione della rampa e quindi al tempo: mediante la rampa di tensione l'asse orizzontale dell'oscilloscopio è diventato un asse temporale.

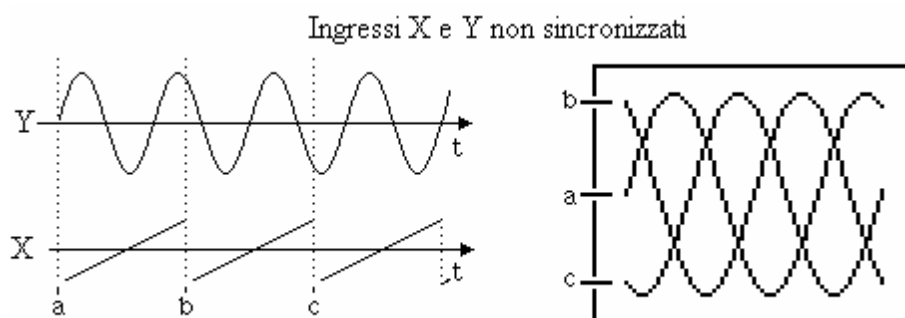
---

39 la deflessione può anche essere ottenuta facendo passare una corrente in avvolgimenti aventi l'asse ortogonale all'asse dell'oscilloscopio. In questo caso sono i campi magnetici così generati che deviano secondo la legge di Lorentz gli elettroni dalla loro traiettoria rettilinea e quindi la deflessione sullo schermo risulta proporzionale alla corrente dell'avvolgimento. Poiché l'induttanza degli avvolgimenti riduce notevolmente la rapidità dello strumento, l'uso di questa tecnica (che richiede precisioni meccaniche non particolarmente spinte ed è quindi più economica) è oggi limitata ai televisori.

Se applichiamo contemporaneamente il segnale di ingresso alla coppia di placchette di deflessione verticale e la rampa lineare a quelle di deflessione orizzontale, sullo schermo apparirà la composizione dei due effetti. Il risultato è mostrato in figura:

Nell'esempio in figura il punto A sullo schermo è dovuto al fatto che la tensione orizzontale è tale da posizionare il punto a sinistra dello schermo mentre la tensione verticale è nulla; passando da A a B la tensione orizzontale cresce di poco mentre la tensione verticale cresce; tra B e C, mentre la tensione verticale resta costante, quella orizzontale cresce facendo visualizzare sullo schermo il tratto orizzontale BC; etc.

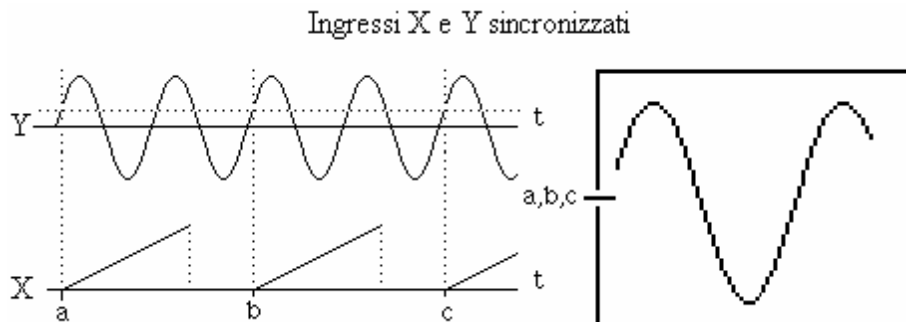
Per variare la scala temporale viene applicata alle placchette di deflessione orizzontale una rampa di tensione con pendenza diversa: più rapidamente varia la rampa, più rapidamente il pennello elettronico si sposta orizzontalmente e più piccolo è l'intervallo temporale rappresentato sullo schermo consentendo di misurare intervalli temporali più piccoli.

Perché sia possibile effettuare delle misure occorre che l'immagine permanga sufficientemente a lungo sullo schermo. Negli oscilloscopi digitali l'immagine viene memorizzata e continuamente ripresentata sullo schermo consentendo di misurare anche segnali non ripetitivi. Negli oscilloscopi analogici è invece necessario ripresentare lo stesso segnale sullo schermo prima che la sua immagine scompaia a causa del limitato tempo di fluorescenza/fosforescenza dello schermo. Ciò significa che anziché un'unica rampa ne occorrerà una successione continua (dente di sega).

In figura si osserva come apparirebbe il segnale all'oscilloscopio: in assenza di sincronizzazione ogni volta che parte una rampa viene visualizzata una porzione del segnale di ingresso, ogni volta diversa dalla precedente con il risultato di una immagine non ferma che impedisce ogni misurazione.

Quando il potenziale a dente di sega torna dal valore massimo al valore minimo, il punto luminoso ritorna immediatamente nella posizione di partenza, mentre viene spento (*blank*ing) il fascetto di elettroni per eliminare la traccia di ritorno.

Perché sullo schermo appaia una immagine stabile e quindi misurabile, occorre che il segnale e il dente di sega siano sincronizzati in modo tale che il dente di sega parta sempre esattamente allo stesso punto della forma d'onda del segnale. Per assicurare questa condizione si usano dei circuiti elettronici di sincronizzazione (**trigger**) associati all'oscilloscopio.

Ingressi X e Y sincronizzati

Y t X t a b c a,b,c

La <u>frequenza massima</u> del segnale che può essere correttamente analizzato dallo strumento è fissata dal tempo di transito di un elettrone nel campo elettrico delle placchette di deflessione.
Infatti, perché siano valide le considerazioni svolte precedentemente, occorre che durante il transito dell'elettrone il potenziale ai capi delle placchette deviatrici possa essere considerato costante. Questa approssimazione è valida se il tempo di transito $t_M = \frac{d}{v_z}$ (con $v_z = \sqrt{2\frac{e}{m}V_0}$) è molto minore del periodo del segnale in misura.

I dispositivi elettronici che corredano lo strumento consentono anche la visualizzazione di più segnali "contemporaneamente". Ciò si realizza in modi diversi a seconda della frequenza dei segnali da misurare.

Se la frequenza è sufficientemente elevata (> kHz), i due segnali di ingresso vengono alternativamente (modalità *ALTERNATE*) presentati sullo schermo, uno ad ogni spazzolata completa in orizzontale. Il tempo di latenza, dovuto all'azione combinata dei fosfori dello schermo e dell'immagine sulla retina dell'occhio dell'osservatore, fa sì che sembri che le due immagini siano presenti contemporaneamente sullo schermo.

Se invece la frequenza è inferiore si utilizza la modalità *CHOPPED* nella quale, durante la spazzolata orizzontale, vengono alternativamente applicate alle placchette verticali le tensioni dei due segnali d'ingresso. Ogni segnale viene cioè presentato a tratti sullo schermo; tratti sufficientemente brevi (e quindi con interruzioni altrettanto brevi) affinché l'occhio dell'operatore non si accorga che l'immagine non è continua.

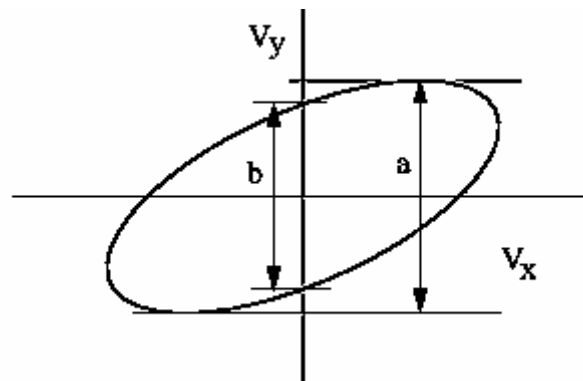
Un oscillografo a raggi catodici può essere utilizzato per misurare:

a) differenze di potenziale

La deflessione verticale del punto luminoso permette di risalire, conoscendo il fattore di deflessione, alla differenza di potenziale applicata alla coppia di placchette verticali. Ovviamente il costruttore dello strumento graduerà la scala verticale già in valori di tensione

b) differenze di fase

Se visualizziamo contemporaneamente due segnali periodici ai due ingressi e imponiamo con il trigger che la deflessione orizzontale parta con uno particolare dei due, allora si potrà visualizzare un eventuale anticipo/ritardo temporale di un segnale rispetto all'altro e da questa misura risalire alla differenza di fase fra i due segnali.

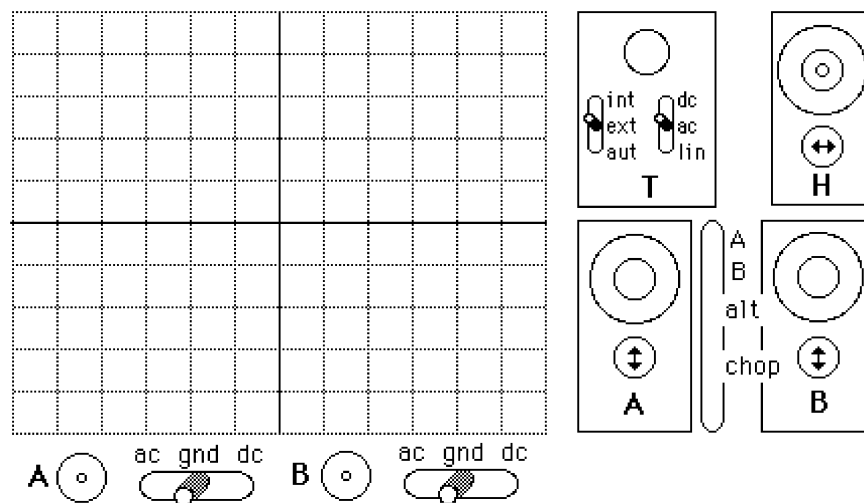
Un metodo diverso, detto metodo dell'ellisse, consiste invece nell'applicare un segnale sinusoidale alle placchette Y di deflessione verticale e un altro, sempre sinusoidale, a quelle X di deflessione orizzontale, escludendo quindi la tensione a dente di sega.
Pertanto un punto luminoso si muoverà sullo schermo, le cui coordinate X e Y sono proporzionali, tramite i due fattori di deflessione alle tensioni d'ingresso.
Nel caso di due segnali sinusoidali di uguale frequenza l'immagine che apparirà sullo schermo sarà una ellisse.

Se supponiamo ad esempio: $X(t) = A_X V_X \cos(\omega t)$ $Y(t) = A_Y V_Y \cos(\omega t - \varphi)$
Le quantità a e b indicate nel disegno valgono:
$a = 2 A_Y V_Y$;
b è invece ottenuto per $X(t) = 0$, cioè $\omega t = n \pi/2$ e quindi
$b = 2 |Y(t = n/\omega\ \pi/2)| = 2 A_Y V_Y |\cos(n \pi/2 - \varphi) = 2 A_Y V_Y | \sin \varphi|$

Pertanto $b/a = |\sin \varphi|$ cioè, visualizzata l'ellisse, è possibile misurare la funzione legata al modulo della differenza di fase fra i due ingressi.

Casi particolari:
- se la fase è nulla l'ellisse degenera in una retta
- se la fase è $\pi/2$ gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi cartesiani.

c) rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali

Se il rapporto tra le frequenze di due onde sinusoidali è un numero razionale, applicando i due segnali alle placchette di deflessione, si ottengono sullo schermo dell'oscilloscopio delle figure note come figure di Lissajous. Questi disegni permettono di ricavare con notevole precisione il rapporto tra le due frequenze calcolando il rapporto tra il numero dei massimi della deflessione orizzontale e il numero dei massimi della deflessione verticale (tipicamente una delle due è nota e da questo metodo si ottiene la misura della frequenza dell'altra).

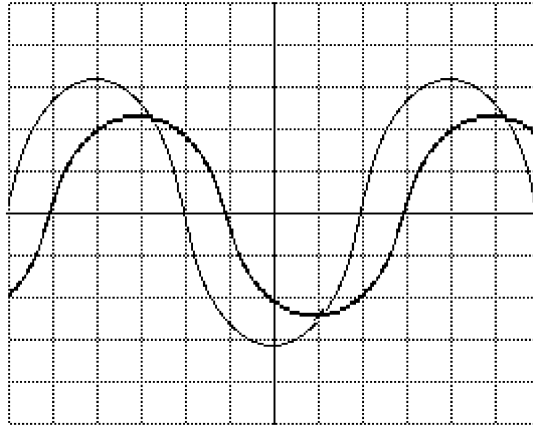
Anche se si basano sullo stesso principio di funzionamento due oscilloscopi con le stesse prestazioni possono apparire molto diversi fra loro. In Laboratorio sono disponibili diversi tipi di oscilloscopi; hanno tutti però le stesse caratteristiche di base:
- uno schermo graduato,
- almeno due canali di ingresso per i segnali da visualizzare,
- due sezioni (una per ogni canale di ingresso) per regolare la sensibilità nella misura di tensioni e centrare in verticale le forme d'onda visualizzate,
- una sezione orizzontale per spostare le forme d'onda in orizzontale e variare la sensibilità nelle misure di tempo,
- una sezione di *trigger* per sincronizzare i segnali d'ingresso con il dente di sega che permette la visualizzazione V vs T
- alcune regolazioni accessorie come l'accensione dello strumento, la regolazione della luminosità delle forme d'onda visualizzate ed altro.

Iniziamo dallo schermo: un grigliato il cui passo viene definito "divisione"; gli assi orizzontale e verticale suddividono ulteriormente le divisioni in 5 parti.

I due canali di ingresso (etichettati con A e B o *left* e *right* o 1 e 2) sono provvisti di connettori per cavi coassiali: la parte esterna del connettore è collegata al potenziale di riferimento (terra) mentre la tensione da misurare è presente fra la parte esterna del connettore e il *pin* interno al connettore.

Per ogni canale è presente un commutatore che consente:
A) di scollegare il segnale e porre l'ingresso al potenziale di riferimento (in questo modo si ottiene una tensione nulla che facilita la determinazione dello zero dello strumento)
B) di collegare il segnale d'ingresso allo strumento direttamente (d.c. sta per *direct coupling*: accoppiamento diretto)
C) di collegare il segnale d'ingresso allo strumento attraverso una capacità in serie di valore elevato che consente di visualizzare piccole variazioni di tensione sovrapposte ad una tensione continua di valore elevato (a.c. per *alternate coupling*)

Per ogni canale è presente una sezione in cui è possibile variare verticalmente la posizione del segnale visualizzato e definire la sensibilità della misura di tensione (ruotando il selettore è possibile variare la scala verticale; tipicamente da 2 mV/div fino a 50 V/div.
Come esempio nel seguito supporremo di aver scelto per entrambi i canali la sensibilità di 1 V/div che permette per uno schermo come quello del disegno di misurare tensioni fino a 10 V (in verticale ci sono 10 divisioni).

La sezione orizzontale (H nel disegno) consente di spostare orizzontalmente le forme d'onda visualizzate e di variare la sensibilità nelle misure di tempo (tramite la tensione a dente di sega generata dallo strumento, l'asse orizzontale dello schermo diventa un asse temporale).
Il commutatore consente di variare la scala temporale; tipicamente da 0,1 μs/div fino a 5 s/div.

Come esempio nel seguito supporremo di aver scelto la scala 0,5 ms/div che consente di misurare intervalli temporali fino a 6 ms (lo schermo disegnato nell'esempio ha 12 divisioni orizzontali).

1 V/div; 0,5 ms/div asse verticale : 1 V/div per entrambi i canali; asse orizzontale : 0,5 ms/div.

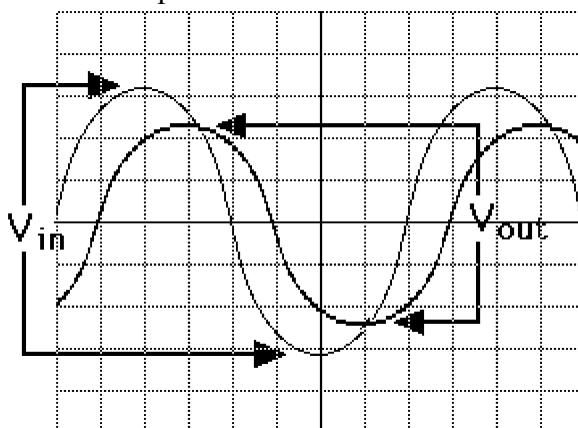
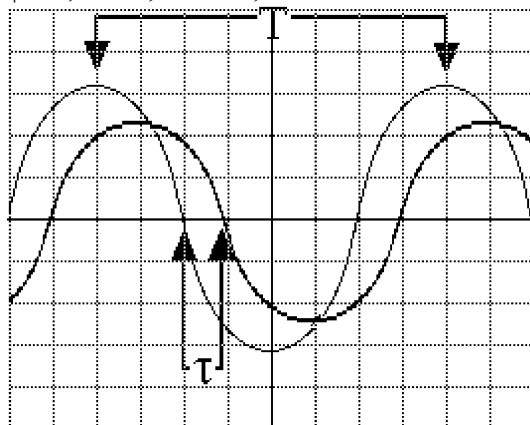
La sezione "*trigger*" (contrassegnata con T nell'esempio) merita maggiore attenzione per la complessità della funzione che svolge.
Mediante il *trigger* si fissa un punto della forma d'onda (una tensione di soglia e un suo verso di attraversamento); ogni volta che la tensione d'ingresso raggiunge la tensione prefissata viene innescato il dente di sega cosicché diverse porzioni dello stesso segnale vengono visualizzate sovrapposte l'una all'altra con la stessa fase.
Anche se è possibile agire su un selettore per attivare una modalità automatica di sincronismo, i risultati migliori si ottengono ponendo il selettore sulla modalità "*normal*" e agendo sulla manopola per regolare la tensione di soglia.

Supponiamo ora di voler visualizzare contemporaneamente due forme d'onda, per esempio la tensione erogata da un generatore sinusoidale e la tensione fra due punti di un circuito alimentato da quel generatore.

Colleghiamo l'uscita del generatore anche al canale A dell'oscilloscopio e colleghiamo l'uscita del circuito al canale B.

Regoliamo la posizione verticale delle forme d'onda in modo tale che la tensione nulla coincida con l'asse dei tempi. Regoliamo le sensibilità delle tensioni per i due canali (potrebbero essere diverse fra loro). Scegliamo una scala dei tempi tale da visualizzare almeno un periodo.
Selezioniamo nella sezione *trigger* la modalità "*normal*". Posizioniamo l'opportuno commutatore per sincronizzare il dente di sega col segnale presente in A.
Scegliamo la modalità "*alternate*" o "*chopped*" che meglio consente la visualizzazione di un'immagine stabile.
Al variare del valore della soglia di trigger si osserverà lo spostamento delle due forme d'onda seguendo l'andamento della tensione applicata ad A.

Supponiamo di voler misurare il rapporto fra la tensione di uscita del circuito e quella d'ingresso fornita dal generatore.
Una volta ottenute sullo schermo forme d'onda stabili si può passare alla misurazione dell'ampiezza dei due segnali; potrebbe essere sufficiente misurare la distanza fra il valore di picco e l'asse

temporale ma in genere è preferibile misurare la distanza verticale fra il picco positivo e quello negativo per evitare l'effetto di un non perfetto azzeramento.

Nel nostro esempio la tensione d'ingresso vale Vin = 6,4 V e quella d'uscita Vout = 4,8 V: il circuito ha un'attenuazione |F| = 4,8 V/6,4 V = 0,75.

Volendo invece misurare la differenza di fase φ fra i due segnali ricordiamo che essa è collegata al ritardo temporale τ tramite la relazione $(\omega t + \varphi) = [\omega(t + \tau)]$ da cui $\varphi = \omega \tau = 2\pi \tau/T$.
Nel nostro esempio $\tau = 0{,}45$ ms e T = 4,0 ms da cui $\varphi = 0{,}71$ rad.
Ovviamente dalla misura del periodo si può risalire alla frequenza dei segnali d'ingresso e uscita che in questo caso è pari a 0,25 kHz.

STRUMENTI DI MISURA DIGITALI

CENNI DI ELETTRONICA DIGITALE

Prima di passare a illustrare il principio di funzionamento di alcuni semplici strumenti digitali di base prendiamo confidenza con dei rudimenti di logica binaria e di elettronica digitale.

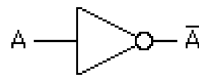
OPERAZIONI CON VARIABILI BINARIE

Una variabile binaria (o logica o di Boole o booleana) può assumere solo due valori (**0 o 1**, vero o falso, acceso o spento, aperto o chiuso, ...). Per variabili di questo tipo è stata sviluppata un'algebra opportuna che definisce alcune operazioni fondamentali.
Una caratteristica dell'algebra booleana è la possibilità di descrivere le funzioni facendo assumere alle variabili tutti i loro possibili valori (sono solo due!); si possono costruire così delle tabelle rappresentative di ciascuna funzione (tabelle della verità).

Esaminiamo le pricipali funzioni logiche:

- **negazione** (**NOT**): data una variabile A la sua negata $\overline{A}$ è la variabile che assume il valore complementare: tabella della verità:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Una ovvia proprietà della funzione NOT è : $A = \overline{\overline{A}}$
L'operazione logica **NOT** viene rappresentata dal simbolo:

Talora (all'ingresso o all'uscita di una altra funzione) il simbolo della negazione viene sintetizzato col solo tondo.

- **somma logica** (**OR**): la somma logica di due o più variabili vale **1** se e solo se almeno uno degli addendi vale **1**.

A	B	C = A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

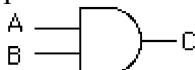
proprietà:
$A+0 = A$
$A+1 = 1$
$A+A = A$
$A+\overline{A} = 1$

L'operazione logica **OR** viene rappresentata simbolicamente così:

- **prodotto logico** (**AND**): il prodotto logico di due o più variabili vale **1** se e solo se tutti i fattori valgono **1**.

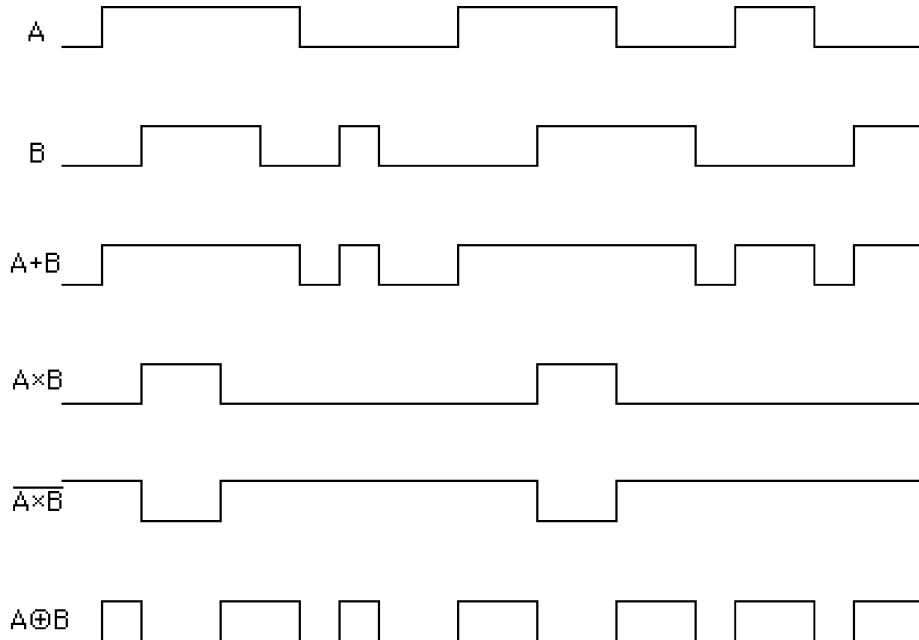
A	B	$C = A \times B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

proprietà:
$A\times 0 = 0$
$A\times 1 = A$
$A\times A = A$
$A\times\overline{A} = 0$

L'operazione logica **AND** viene rappresentata così:

Quanto detto finora è di validità generale e non va ristretto al solo settore dell'elettronica perché, per esempio, le variabili binarie in esame possono rappresentare la verità o la falsità di un qualsiasi concetto.
In un segnale di tipo analogico l'informazione che viene trasmessa istante per istante è quella dell'ampiezza del segnale (tensione, corrente, temperatura, pressione, etc.). In un segnale digitale, invece, istante per istante l'unica informazione trasmessa è la presenza o meno di un unico valore.
Nel campo elettronico, per esempio, esiste una famiglia di dispositivi logici detta TTL *(transistor-transistor logic*) in cui i valori 0 e 1 vengono definiti in base al valore della tensione del segnale: fra 0 V e 1 V viene considerato **0**; fra 2 V e 5 V viene considerato **1**; valori di tensione fra 1 V e 2 V non sono previsti.
Questo intervallo vietato di tensioni costituisce il margine di immunità dal rumore perché un disturbo, per alterare il valore di un segnale, deve avere una tensione superiore ad 1 V. È questa elevata immunità dal rumore che ha favorito la spinta verso lo sviluppo dell'elettronica digitale[40].

Il dispositivo che svolge una particolare funzione logica elementare viene detto porta (o *gate*). Dal punto di vista costruttivo non tutte le porte hanno lo stesso rendimento in termini di costo, facilità costruttiva, spazio impiegato, potenza dissipata e velocità. I dispositivi a stato solido che vengono realizzati oggi integrano al loro interno molte porte elementari che possono svolgere funzioni assai complesse. A seconda della tecnologia impiegata il massimo delle prestazioni si può ottenere utilizzando un particolare tipo di porta elementare.

Utilizzando più porte in successione si realizzano dispositivi combinatoriali i quali forniscono in uscita un segnale logico che è il risultato della combinazione dei segnali di ingresso.

Le considerazioni svolte finora si applicano inalterate nel caso in cui i segnali varino nel tempo: istante per istante l'uscita è funzione dei soli segnali presenti agli ingressi dei diversi dispositivi combinatoriali esaminati

L'ultima riga è relativa all'operazione di OR esclusivo che vale **1** solo se uno ed uno solo degli ingressi è a **1**.

---

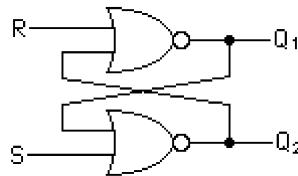
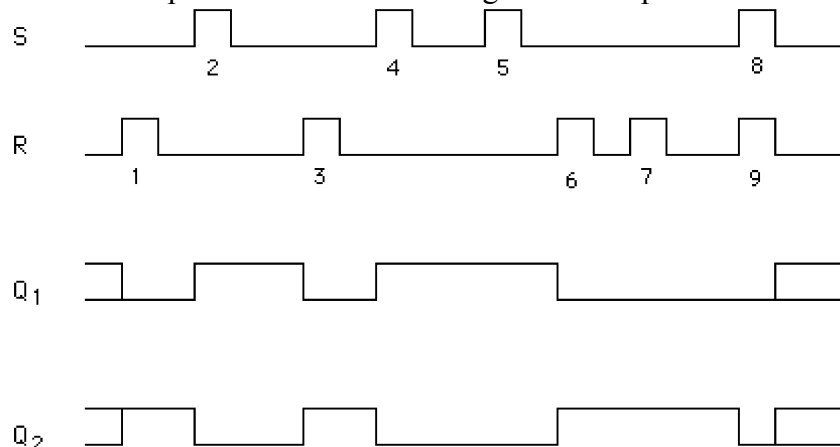
40 la logica TTL sta cadendo in disuso in quanto esistono molte altre famiglie di dispositivi logici con caratteristiche migliori in termini di velocità, potenza dissipata e grado di complessità. Tuttavia in ognuna di esse sono definiti gli intervalli di variabilità di una grandezza elettrica corrispondente ai due stati logici **0** e **1** lasciando una zona intermedia libera come margine di immunità al rumore

LOGICA SEQUENZIALE

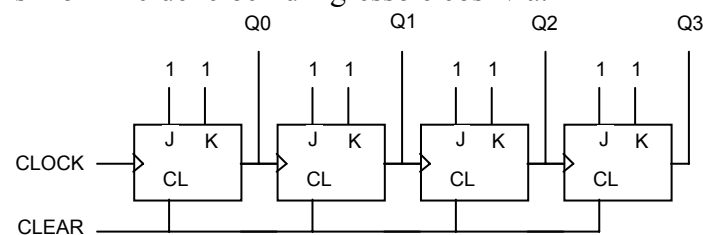
I circuiti combinatoriali non sono in grado di risolvere tutti i problemi che si incontrano nell'elaborazione digitale dei segnali: spesso è necessario tener conto anche dell'evoluzione temporale degli stessi e quindi sono stati sviluppati degli elementi la cui risposta è funzione non solo dei segnali presenti all'ingresso ma anche di quelli applicati precedentemente. Lo studio di tali dispositivi è materia della logica sequenziale di cui accenneremo ad alcuni esempi.

FLIP-FLOP

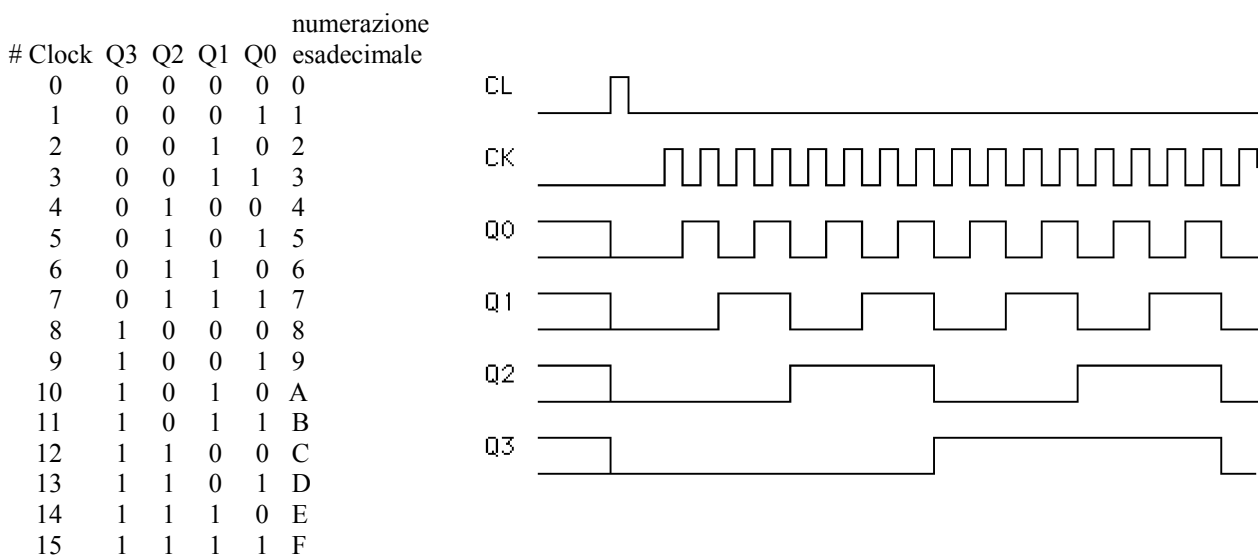
Si tratta di un dispositivo logico in grado di memorizzare una informazione elementare binaria (bit) sotto forma di un particolare stato dei suoi componenti interni: per esempio la presenza di informazione è rappresentata dal fatto che all'interno del flip-flop alcune porte hanno in uscita un valore logico **1** , altre **0**; invece, in assenza di informazione, i valori logici di quelle porte sono rispettivamente **0** e **1**.
Il flip-flop è, in altri termini, una cella di memoria in grado di mantenere indefinitamente l'informazione che ha codificata all'interno.

Esistono diversi tipi di flip-flop; analizziamo in dettaglio il flip-flop set-reset che presenta due ingressi (S e R) e due uscite che per il momento chiameremo Q_1 e Q_2. Esso è realizzato mediante porte NOR (OR seguito da una negazione):

in assenza di segnali R = S = 0. In queste condizioni l'uscita Q_1 costituisce uno dei due ingressi del secondo NOR. L'uscita del secondo NOR, avendo agli ingressi S = 0 e Q_1, vale $\overline{Q}_1$ e quindi $Q_2 = \overline{Q}_1$. L'uscita Q_2 del secondo NOR viene riportata all'ingresso del primo NOR, dove R = 0, e quindi l'uscita del primo NOR vale $\overline{Q}_2$ e quindi $Q_1 = \overline{Q}_2$; poiché $Q_2 = \overline{Q}_1$ risulta $Q_1 = \overline{Q}_2 = \overline{\overline{Q}}_1$ cioè la configurazione è stabile nel senso che il valore dell'uscita Q_1 (quale che sia) si mantiene costante nel tempo; analogamente per Q_2.
Poiché le due uscite sono complementari Q_1 viene normalmente contrassegnato con Q e Q_2 con $\overline{Q}$.
Il dispositivo quindi, in assenza di segnali, presenta alle uscite una configurazione di segnali stabile (la cella di memoria contiene un bit di informazione).
Esaminiamo l'andamento temporale delle uscite nel seguente esempio:

prima dell'applicazione del primo segnale le uscite Q_1 e Q_2 possono essere indifferentemente a 0 o a 1 ma sono in ogni caso complementari. Il primo impulso è di reset e quindi Q_1=0 e Q_2=1. Tale stato perdura fino all'arrivo del secondo impulso che è di set e quindi Q_1=1 e Q_2=0. Analogamente il terzo impulso riazzera la cella e il quarto riscrive in essa. Va notato che il quinto impulso non altera la memoria: si prova a scrivere un 1 in una cella che già contiene un 1; analogamente il settimo impulso non altera le uscite (si sta cancellando una memoria che già contiene uno 0).
Fino all'applicazione dell'ottavo e nono impulso le uscite Q_1 e Q_2 sono complementari. L'impulso 8 di set e il 9 di reset vengono attivati contemporaneamente: come risultato Q_1=Q_2=0 e al momento del rilascio degli ingressi le due uscite, tornate complementari, hanno un valore non prevedibile. Questa configurazione degli ingressi va quindi evitata (si sta cercando, contemporaneamente, di scrivere e cancellare un'informazione !).

CONTATORE BINARIO

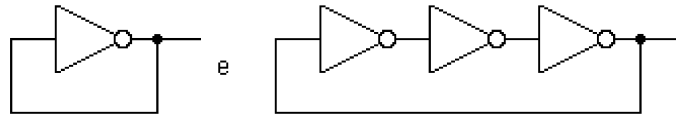
Un contatore è costituito da una successione di flip-flop J-K con J e K entrambi ad **1**. Questo è un diverso tipo di flip-flop il cui funzionamento viene determinato anche dallo stato di due ingressi detti J e K. Quando questi sono a **1**, la transizione **1-0** del clock fa commutare l'uscita Q. Se questa viene inviata come segnale di clock ad un secondo J-K, l'uscita del secondo flip-flop commuta ogni due transizioni **1-0** del clock d'ingresso e così via.

Le uscite Q0, Q1, Q2, Q3 rappresentano rispettivamente i coefficienti di $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ cioè la rappresentazione binaria del numero di transizioni di clock all'ingresso del contatore. Un ingresso di CLEAR distribuisce infine l'eventuale segnale a tutti i flip-flop azzerandone il contenuto :
Q0 = Q1 = Q2 = Q3 = 0.
Il funzionamento può essere così riassunto :

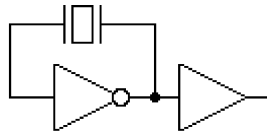
# Clock	Q3	Q2	Q1	Q0	numerazione esadecimale
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	2
3	0	0	1	1	3
4	0	1	0	0	4
5	0	1	0	1	5
6	0	1	1	0	6
7	0	1	1	1	7
8	1	0	0	0	8
9	1	0	0	1	9
10	1	0	1	0	A
11	1	0	1	1	B
12	1	1	0	0	C
13	1	1	0	1	D
14	1	1	1	0	E
15	1	1	1	1	F

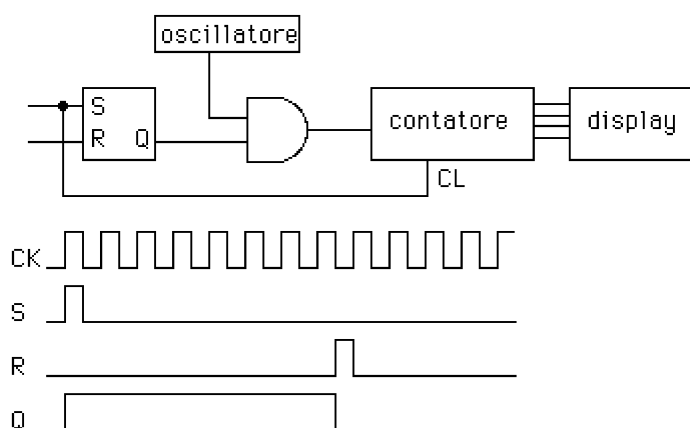
CL
CK
Q0
Q1
Q2
Q3

STRUMENTI DIGITALI

Esaminiamo ora il principio di funzionamento di alcuni semplici strumenti digitali utilizzando gli elementi di logica digitale appresi finora.

CRONOMETRO

L'elemento base è un oscillatore in grado di fornire una frequenza di riferimento stabile (in un cronometro meccanico si ottiene mediante un bilanciere e forzando le oscillazioni mediante un dispositivo a scappamento detto ancora collegato ad una molla come sorgente di energia).
Semplicissimi oscillatori potrebbero essere i seguenti:

Analizziamo il primo: se in ingresso c'è un **1**, in uscita, dopo il tempo necessario perché il segnale si propaghi nel dispositivo, ci sarà uno **0** che viene immediatamente riportato in ingresso. Con un ritardo pari al tempo di propagazione della porta, in uscita ci sarà un **1** e così via: viene generata un'onda quadra di periodo pari al doppio del tempo di propagazione del segnale.
Volendo, per esempio, triplicare il periodo si può ricorrere al secondo circuito.
Gli inconvenienti di simili circuiti sono dovuti al fatto che i tempi di propagazione dei segnali sono dell'ordine della decina di nanosecondi (irrealizzabilità pratica di basse frequenze), possono variare da dispositivo a dispositivo dello stesso tipo (difficoltà di sostituzione di componenti guasti) e possono dipendere dalla temperatura (frequenza non stabile).

Per ovviare a questi inconvenienti si preferisce ricorrere ad un oscillatore controllato al quarzo:

Il quarzo è un cristallo piezoelettrico (una differenza di potenziale applicata sulle facce di una sua lamina provoca una variazione dello spessore della lamina e viceversa). Tagliandolo in modo opportuno si può ottenere un dispositivo con una frequenza di risonanza meccanica stabile a parti per milione e con un fattore di merito Q elevatissimo.
Nel circuito di principio della figura il quarzo costituisce un filtro passa banda che di tutte le armoniche in cui può essere scomposta l'onda quadra fa passare solo quella corrispondente alla sua frequenza di risonanza. Come risultato si avrà un'onda sinusoidale che viene trasformata in onda quadra dall'elemento successivo.

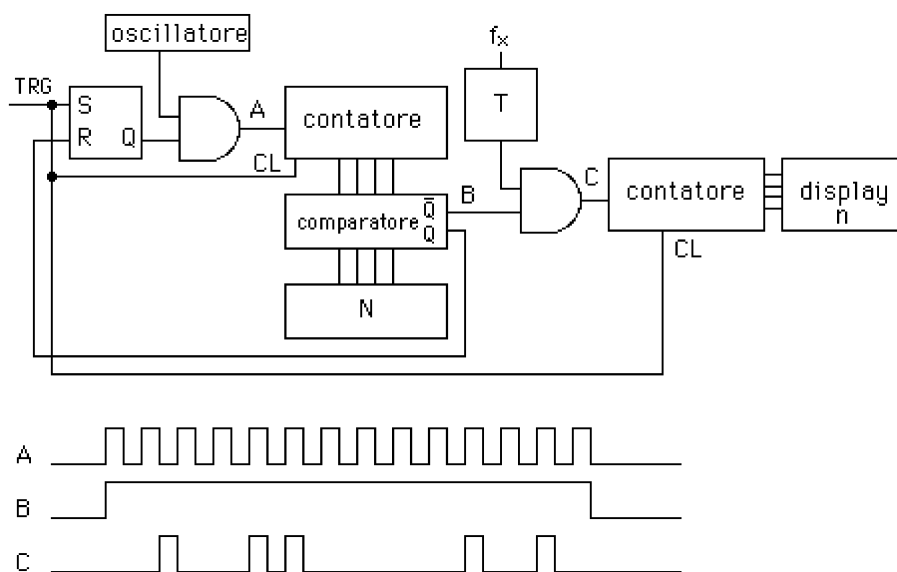
In linea di principio un cronometro funziona nel seguente modo:

Il segnale di avvio (*start*) viene inviato al set di un flip-flop la cui uscita va ad **1** ed abilita il passaggio dei segnali provenienti dall'oscillatore. Questi incrementano il contenuto di un contatore che viene visualizzato su un *display*.

Il segnale di arresto (*stop*) viene inviato al reset del flip-flop impedendo grazie all'AND l'arrivo di altri segnali di *clock* al contatore. L'impulso di *start* viene anche utilizzato per cancellare un eventuale contenuto preesistente del contatore.

Il numero visualizzato dal *display* (n) indica quante transizioni **1-0** sono avvenute al suo ingresso e quindi quanti periodi (T) dell'oscillatore è durato l'intervallo di tempo (t) compreso fra lo *start* e lo *stop*. In questo caso, evidentemente, il *digit* (quantità minima misurabile) è pari al periodo dell'oscillatore e il risultato della misura è t = nT.

La sensibilità è $s = \partial u/\partial g = \frac{\partial n}{\partial t} = 1/T = f$ con f frequenza dell'oscillatore; la precisione è determinata sostanzialmente dalla stabilità nel tempo dell'oscillatore.

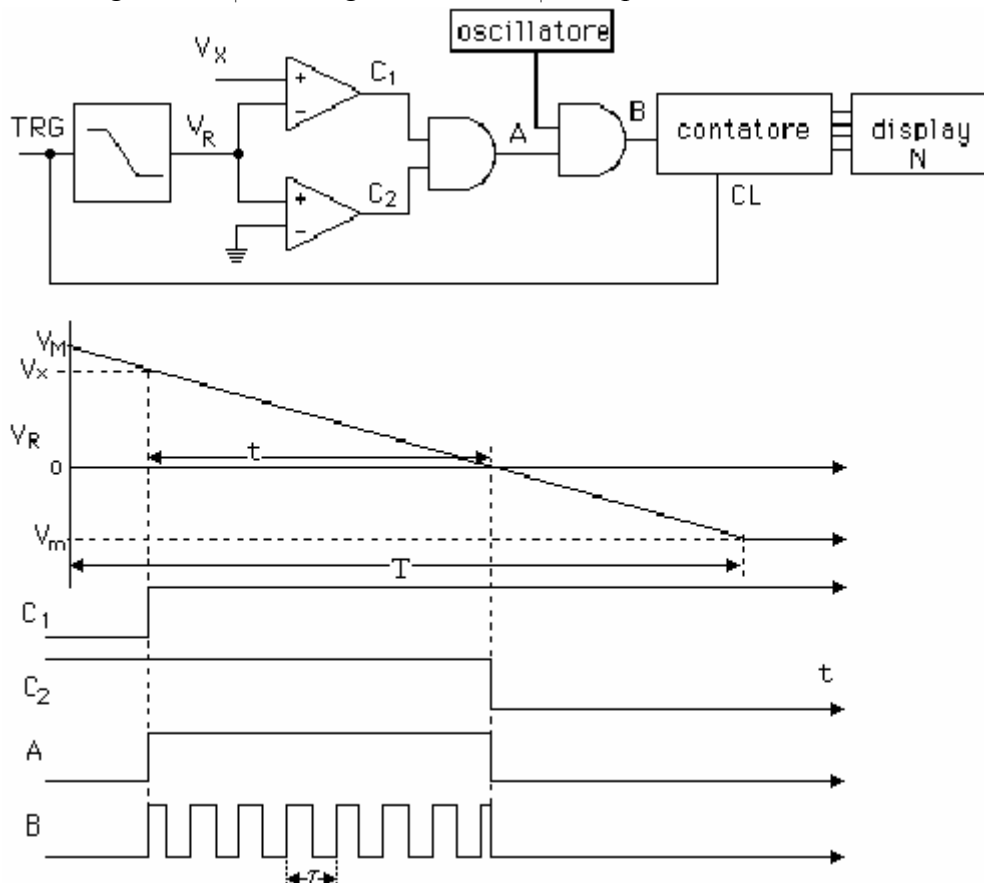
FREQUENZIMETRO

Il frequenzimetro è uno strumento in grado di misurare la frequenza di un segnale; non è necessario che la grandezza fisica in misura sia periodica: in questo caso lo strumento misura la frequenza media.
Un possibile schema di principio di un frequenzimetro è il seguente:

f_X rappresenta la grandezza fisica di cui si vuol misurare la frequenza; poiché essa in generale non è una grandezza elettrica né tanto meno digitale può essere necessario effettuare una trasduzione con un opportuno dispositivo (T) in grado di fornire un impulso logico ogni volta che si manifesta il fenomeno in esame.
Un segnale di sincronismo (*trigger*) abilita il flip-flop producendo in A (vedi il cronometro) l'andamento temporale graficato. Il *trigger* azzera anche i due contatori.
Il primo contatore viene incrementato con le transizioni **1-0** del segnale A. Il numero binario che rappresentano le sue uscite viene confrontato mediante un comparatore logico con il numero binario N realizzato per esempio con alcuni flip-flop in cui è stato memorizzato il numero N.
Il comparatore ha due uscite complementari Q e $\overline{Q}$. L'uscita Q vale **0** fintanto che il contenuto del primo contatore non è pari ad N. Fino a quel momento $\overline{Q}$ abilita il secondo contatore a incrementare il numero n ogni volta che arrivi un segnale dal trasduttore (grafici B e C).
All'arrivo dell'N-sima transizione 1-0 dell'oscillatore, l'uscita Q del comparatore va ad **1** e chiude il flip-flop in ingresso.
Dai due valori N (caratteristica del frequenzimetro) e n (letto dal *display*) si risale al valore della frequenza incognita: sono arrivati n impulsi durante l'intervallo di tempo NT (con T periodo dell'oscillatore), quindi $f_X = n/NT$.
Il *digit* in questo caso vale 1/NT; la sensibilità $s = \partial u/\partial g = \partial n/\partial f_x = NT$ quindi per avere un'elevata sensibilità occorre effettuare la misura di n con una lunga base dei tempi NT.

VOLTMETRO DIGITALE

Prima di discutere il principio di funzionamento di un voltmetro digitale occorre introdurre due elementi che sono solo parzialmente digitali: il generatore di rampa e il comparatore digitale di tensione.

Il primo, una volta attivato con un impulso logico, è in grado di fornire in uscita una tensione analogica che varia linearmente in un tempo T da un valore massimo V_M ad un valore minimo V_m.

Il comparatore digitale di tensione confronta invece due tensioni applicate agli ingressi V_+ e V_-. La sua uscita vale **0** logico se V_+-V_- è negativo e **1** se V_+-V_- è positivo

La tensione V_x rappresenta la grandezza fisica da misurare.

Il principio di funzionamento di questo voltmetro consiste nella trasformazione della misura di V_x in quella di una misura di tempo.

Il segnale di sincronizzazione fa partire la rampa e contemporaneamente azzera il contatore.

La tensione V_R inizia a scendere dal valore V_M a V_m e viene inviata ai due comparatori.

Il comparatore C_1 confronta V_x con V_R e quando $V_x > V_R$ la sua uscita passa da **0** a **1**.

Il comparatore C_2 confronta V_R con 0 V e quindi la sua uscita passa da **1** a **0** quando $V_R < 0$ V.

Durante l'intervallo di tempo t fra la commutazione di C_1 e quella di C_2 gli impulsi dell'oscillatore vengono trasmessi al contatore.

Il numero N di impulsi di *clock* (di periodo τ) contati corrisponde alla durata temporale $t=N\tau$.

Considerando nel grafico di V_R la similitudine fra i due triangoli corrispondenti alla variazione di V_R da V_M a V_m nel tempo T e quella di V_R dal valore V_x a 0 V nel tempo $t = N\tau$ si ottiene la relazione $(V_M-V_m)/T=V_x/N\tau$ e da questa $V_x= N\,(V_M-V_m)\,\tau/T$.

Il *digit* di tensione vale quindi $(V_M-V_m)\,\tau/T$.

La relazione V_x= N (V_M-V_m) τ/T è stata ricavata supponendo lineare la rampa; è quindi illusorio pensare di poter spingere la sensibilità dello strumento oltre il limite imposto dalla precisione della rampa stessa. A parte questa considerazione, la sensibilità ($s=\partial u/\partial g = \partial N/\partial V_x = T/\tau \times 1/(V_M-V_m)$) potrebbe essere aumentata aumentando la frequenza 1/τ dell'oscillatore o riducendo il campo di misura V_M-V_m dello strumento o aumentando il tempo T della rampa.

Dal grafico di B si evidenzia una caratteristica generale degli strumenti digitali: l'intervallo di tempo t non corrisponde esattamente a N τ a causa della quantizzazione dei periodi dell'oscillatore. Questo effetto si traduce in una incertezza nella misura di V_x pari a un *digit*.
In realtà è assai semplice ed economico ridurre il periodo dell'oscillatore. Per questo motivo la frequenza interna dello strumento è tipicamente più elevata di quanto viene poi visualizzato in uscita: in questo modo si riduce l'errore di quantizzazione dei periodi ma, ovviamente, non il *digit* che resta legato alla precisione.

CENNI AD ALTRI STRUMENTI DIGITALI

MULTIMETRO

Mediante l'aggiunta di alcuni semplici elementi circuitali un voltmetro può facilmente trasformarsi in uno strumento (multimetro digitale) per la misura di correnti e di resistenze (in analogia con quanto abbiamo visto dettagliatamente per l'amperometro che può diventare un tester).

PONTE LC

Sollecitando con una tensione sinusoidale generata dallo strumento un circuito (ponte) di cui fa parte anche una impedenza esterna ad esso, è possibile, da una misura dell'attenuazione della tensione alternata (ottenuta con un voltmetro in alternata), risalire alla misura della capacità e dell'induttanza del componente esterno.

BILANCIA ELETTRONICA

Una lamina di materiale piezoelettrico può essere utilizzata come trasduttore per trasformare la pressione esercitata dalla forza peso in una tensione misurabile con un voltmetro.

TERMOMETRO DIGITALE

Molti componenti elettrici, anche le semplici resistenze, hanno caratteristiche che sono funzione della temperatura. Utilizzando tali componenti all'interno di opportuni circuiti è possibile realizzare termometri assai robusti ed affidabili.

OSCILLOSCOPIO DIGITALE

Anche questo è uno strumento che si basa su misure di tensioni. In realtà il circuito utilizzato per effettuare tali misure deve essere molto veloce e quindi si basa su principi diversi da quelli del voltmetro che abbiamo analizzato in precedenza.
Dal punto di vista dell'utilizzatore gli oscilloscopi digitali hanno lo stesso tipo di regolazioni di quelli analogici ma consentono di visualizzare nitidamente anche segnali non ripetitivi.

ESERCIZI

1) Cosa si può dire di uno strumento che pur funzionando produce la stessa risposta nella misura di due g.f. di diverso valore? E di uno che fornisce risposte diverse misurando la stessa g.f. ?

2) La risposta di uno strumento è $u = \frac{A}{B+g}$. Calcolare la sensibilità dello strumento e stabilire se è più sensibile per piccoli o grandi valori della grandezza in misura.

3) Commentare sensibilità, precisione e accuratezza di un orologio fermo

4) Una massa campione di 10 g (senza incertezza !) viene misurata 100 volte con una bilancia ottenendo $\overline{m}$ = 10,020 000 g e $\sigma(m)$ = 0,030 00 g. Lo strumento è accurato?

5) È possibile variare la portata di una bilancia:

a) f.s. = 0,1 kg C.P. = 1 b) f.s. = 0,5 kg C.P. = 2 c) f.s. = 1 kg C.P. = 1

A) determinare l'incertezza di tipo B nei 3 casi (legata al valore di una divisione)

B) con b) sono state effettuate le seguenti misure:

m [g] = 68 77 80 80 80 80 82 83 84 86

qual è il risultato della misura ?

C) la precisione della bilancia è variata dal momento della sua costruzione?

6) Un termometro con sensibilità 0,2°C/div, costante di tempo 5 s e capacità termica C_T=3 cal/°C, è inizialmente alla temperatura T_0=20°C. Viene utilizzato per misurare la temperatura di 100 g di acqua inizialmente alla temperatura T^*= 50°C. Quale sarà il risultato della misura effettuata dopo un minuto dall'inserzione dello strumento?

7) Ricavare la relazione che esprime la dipendenza dal tempo della risposta di un termometro che, inizialmente alla temperatura di T_0 viene posto a contatto con un corpo termostatato a T_1>T_0. Se la costante di tempo del termometro fosse di 5 s, dopo quanto tempo segnerebbe 40°C se T_0=20°C e T_1=50°C ? E per segnare 30°C passando da T_0=50°C a T_1=20°C ?

8) Se un termometro inizialmente a 50°C viene posto a contatto con un corpo termostatato a 10°C e dopo 3 s indica 40°C, dopo quanto tempo dall'inizio della misura indicherà 20°C? Questo termometro potrà essere utilmente impiegato per misurare una temperatura che vari sinusoidalmente con una frequenza di 0,1 Hz ?

9) Fra due punti di un circuito costituito da generatori di tensione e resistenze vengono effettuate le seguenti misure (supporre trascurabili le incertezze):

V = 4,0 V con f.s. 10 V [20000Ω/V]

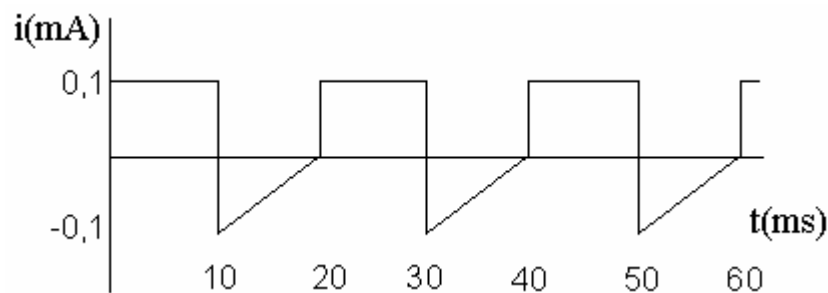
I = 39,5 μA con R_A = 2000Ω

determinare i valori degli elementi del circuito equivalente di Thevenin.

10) Un amperometro con f.s. 1 mA ha una resistenza R_A di 1 kΩ; quanto vale la resistenza complessiva R_I dello strumento se il f.s. viene portato a 10 mA ?

11) Determinare col metodo volt-amperometrico il valore di una resistenza di valore approssimativo R = 2 kΩ. Il voltmetro ha R_V = 100 kΩ e l'amperometro R_A = 1 kΩ.
Quale configurazione degli strumenti minimizza l'errore di inserzione? E se R = 50 kΩ?

12) Un amperometro a bobina mobile ha una scala corrispondente a 2 rad (≈120°) e il f.s. 50 µA. Se il flusso del campo magnetico totale (tutte le spire) è 2 mWb, determinare il valore della costante elastica di richiamo della molla a spirale.
Se il momento di inerzia dell'equipaggio mobile è 0,5 g cm^2 quale sarebbe il periodo di oscillazione dell'indice dello strumento se non ci fosse attrito viscoso ?

13) Un amperometro a bobina mobile ha i seguenti parametri:
I=0,1 g cm^2; c=10 dine cm/rad; Φ= 0,01 Wb.
Calcolare la sensibilità dello strumento e la frequenza di oscillazione naturale dell'equipaggio mobile. Lo strumento viene utilizzato per misurare i(t): cosa indicherà?

14) Per misurare la velocità uniforme di rotazione di un disco (ω =1571 rad/s) utilizzo una fotocellula connessa con un oscilloscopio (CP = 2) che permette di rivelare il passaggio di un punto luminoso segnato su disco. Se posso utilizzare il fondo scala di 10 ms e 0,1 s qual è la miglior misura che posso ottenere di ω?

SOLUZIONI

1) a: è poco sensibile b: è poco preciso

2) $s = -\frac{A}{(B+g)^2}$; è più sensibile per bassi valori di g

3) sensibilità nulla, precisione infinita, accuratezza ottima ma solo due istanti al giorno ...

4) Dai dati si ottiene m = (10,020 0 ± 0,003 0) g pertanto lo strumento non è accurato perché $|t|>3$

5) A:$\sigma_B = \frac{2\Delta u}{\sqrt{12}}$; C.P.= $\frac{\Delta u}{u_{f.s.}} 100 \rightarrow \sigma_B = \frac{2\ C.P.\ u_{f.s.}}{100\sqrt{12}} \rightarrow \sigma_B(a) = 0{,}58$ g; $\sigma_B(b) = 5{,}8$ g; $\sigma_B(c) = 5{,}8$ g

B: $\overline{m}$ = 80 g $\sigma_A(m) = 4{,}922$ g $\sigma_A(\overline{m}) = 1{,}556$ g

dato che $\sigma_A(\overline{m})$ è trascurabile rispetto a $\sigma_B(m)$ il contributo, per esempio di taratura, stabilito dal costruttore domina sull'incertezza di tipo A; meglio sommare in quadratura i due contributi $\sigma(m) = 6{,}005$ g $\rightarrow$ m = (80,0±6,0) g

C: la precisione misurata da $\sigma_A(m) = 4{,}9$ g è ancora < $\sigma_B(b) = 5{,}8$ g e quindi non è variata

6) dopo 12 τ non sono presenti errori di rapidità apprezzabili:

$T_f = \frac{C_T T_0 + C_C T^*}{C_T + C_C}$ con Cc=100g x 1cal/(g °C) =100 cal/°C $\rightarrow T_f$ = (49,126±0,058) °C

7) T[°C]=50-(50-20)$e^{-t/\tau} \rightarrow$ t(T=40°C) = τ ln 3= 5,493 s

T[°C]=20-(20-50)$e^{-t/\tau} \rightarrow$ t(T=30°C) = τ ln 3= 5,493 s.

8) T[°C] = 10-(10-50)$e^{-t/\tau} \rightarrow$ 40 =10 + 40 $e^{-3/\tau} \rightarrow \tau$ = 3/ln(4/3) = 10,4 s

20 = 10-(10-50)$e^{-t/\tau} \rightarrow$ 20 =10 + 40 $e^{-t/\tau} \rightarrow$ t = τ ln 4 = 14,4 s

no: la temperatura compirebbe un ciclo in meno di una costante di tempo

9) Si stanno eseguendo misure ai capi di un circuito costituito da un generatore f con in serie una resistenza R.
Nella misura di tensione il circuito viene chiuso dalla resistenza del voltmetro pari a R_V = 200 kΩ ai capi della quale si misura V = f $R_V/(R+R_V)$. Nella misura di corrente si mette in serie a R la resistenza dell'amperometro R_A e quindi si misura I = f /(R+R_A). R = 201,07 kΩ; f = 8,021 V

10) Misurando 10 mA nella resistenza di shunt R_S devono scorrere 9 mA. In queste condizioni la tensione ai capi di R_A è pari a 1 kΩ x 1 mA = 1V. Ovviamente la stessa tensione è ai capi di R_S che quindi vale 1V/9mA =1/9 kΩ che in parallelo a 1 kΩ realizza una resistenza totale di 100Ω
(il fattore di riduzione della resistenza è pari all'aumento di portata)

11) A: col voltmetro ai capi di R si misurerebbero 1,96 kΩ; con l'amperometro in serie a R si misurerebbero 3 kΩ: conviene la prima configurazione (la condizione R >> R_A non è realizzata)

B: col voltmetro ai capi di R si misurerebbero 33,3 kΩ; con l'amperometro in serie a R si misurerebbero 52 kΩ: conviene la seconda configurazione (la condizione R << R_V non è realizzata)

12) La sensibilità s = $\frac{2\,\text{rad}}{50\mu\text{A}}$ è pari a $\frac{\Phi}{c}$ pertanto c = 2 mWb x 50 μA / 2rad = 50 nNm/rad

$$T = \frac{2\pi}{\omega_N} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5\text{x}10^{-7}}{50\text{x}10^{-9}}}\ \text{s} = 6{,}28\ \text{s}$$

13) s = $\frac{\Phi}{c}$ = 10^4 rad/A; ω_N = $\sqrt{\frac{c}{I}}$ =10 rad/s << $\frac{2\pi}{20\,\text{ms}}$ = 314 rad/s e quindi nessuna armonica dello sviluppo di Fourier riuscirà ad essere misurata. Lo strumento indicherà quindi il valore mediato su un periodo: 0,25 mA.

14) Da σ_B = $\frac{2\ \text{C.P.}\ u_{f.s.}}{100\sqrt{12}}$ si ricavano rispettivamente 0,12 ms e 0,0012 s mentre dalla pulsazione si deduce che il periodo di rotazione vale 4 ms. Sfruttando l'isocronismo della rotazione:
con 10 ms si visualizzano 2 periodi → t_2 = (8,00 ± 0,12) ms → T = (4,000 ± 0,060) ms
con 0,1 s si visualizzano 25 periodi → t_{25} = (0,1000 ± 0,0012) s → T = (0,004 000 ± 0,000 048)s
Le due misure sono sostanzialmente coincidenti 1,5% e 1,2%; dalla seconda ω = (1571 ± 19)rad/s